DE INFINITIS PARABOLIS

LIBER QVINTVS.

Digitized by Google

Digitized by Google

DE INFINITIS PARABOLIS

LIBER QVINTVS.

OPVSCVLVM GEOMETRICVM.

AVTHORE

F. STEPHANO DE ANGELIS

VENETO,

ORDINIS IESVATORVM S. HIERONYMI.

In Celeberrimo Patauino Lyceo Matheſeos Profeſſore.

Biblioteca S. Pan=taleonis Scholarum Pia



VENETIIS, MDCLXIII.

Apud Ioannem La Nou.

SVPERIORVM PERMISSV.

Ex libris Jo: Alphonsi Borelli

Digitized by Google

Digitized by Google

Illuſtriſſimo atque Excellentiſſimo D.

D. IOANNI PRÆSLAO S.R.I. COMITI DE LESZNO LESZCZYNSKY, DOMINO IN SMIEGEL, PRZYGODZICE, RIDZYNA, DOMBECZ, ZABOROVV, &c.

F. STEPHANVS ANGELI VENETVS,
In Patauino Lyceo Matheſeos Profeſſor P.P.P.

INTER ea, quæ per grata ac iucunda vnquam mihi accidere, profectò (Illuſtriſsime ac Excellentiſsime Comes) illud maximum cenſeo, puriſſimo lacte Mathematum adoleſcentiam Tuam alere contigiſſe. Vix quippè ab Illuſtriſſimis atque Excellentiſſimis

Andrea Contareno, Nicolao Sagredo, ac Baptiſta Nanio, Equitibus, D. Marci Procuratoribus, Patauini Lycei Moderatoribus, & Dominis meis Clementiſſimis ad Matheſim enucleandam in eodem hoc Atheneo ſelectus, Patauinas oras attigi; dùm nuperrimè è Sarmatia aduenſens, vltrò, ſpontèque Geometricis imbuendus, ſecundis auſpicijs occurreris. Nondùm etenim ætatis Tuæ tertio luſtro completo, tam tutè, ſimulque feſtinanter Geometrica Elementa percurriſti, vt exinde ſpem maximam feceris, iactandi in poſterum haud incongruè licere, dę Geometria me optimè meritum. Siquidem, ſi ſapientiſſimo Salomone teſte, *Gloria Patris eſt Filius ſapiens:* qualis amabò indè mihi apud Geometras eſt gloria euentura, quod Matheſi Te genuerim? Profectò, ſi pro vt eſt in Adagijs, *Ex Aurora deprehenditur qualis ſucceſſura ſit dies: Ex vnqueque dignoſcitur Leo:* non niſi ſplendidiſſima, ac fortiſſima, tyrocinia Tua portendunt; Teque ad Matheſeos apicem peruenturum pollicentur. Idcircò, etſi ex difficiliori, ac penitiori Geometria deprompas, has attamen elucubrationes meas Tibi dicandas fore decreui. Ratus, has modò à nobiliſſimis, ac ſplendidiſſimis natalibus Tuis congenita benignitate, excepturas: aliquandò verò (dùm ſcilicet Geometricæ vires in Te vegetiores fient) earundem pondus ad Trutinam fore applicaturum. Interim vale Illuſtriſſime atque Excellentiſſime Domine, ſimulque meæ obſeruantiæ memento.

L E-

LECTORI BENEVOLO.

FVit typis cuſa, paucis ab hinc menſibus, *opellula noſtra octaua*, Acceſſionis ad Steriometriam & Mecanicam Pars Prima indigetata. *Primum relatiua inter connumerari, neminem ignorare arbitrandum. Prima pars ſaltem ſecundæ eſt index. Idcircò non niſi rectè admonuimus ipſiusmet in limine, tutè hanc expectandam. Rapieris ergo nunc fortaſſis in admirationem (Benigne Lector) inſpiciens noſtrum hocce nonum fętum à promiſſo tàm diuerſum. Aſt deſituram hanc ſperaremus, veniamque laturos ſi germana, & vera cauſa in aperto Tibi eſſet. Porrò minimè licet. Hoc vnicum itaque ſufficiat ſcire, ipſam à geometricis ferè totaliter nos auocaſſe; peperiſſeque, vt ea omnia, quæ antea meditati eramus, ac prælo ſubijcere decreueramus, adhuc confuſa & inconcinnata iaceant. Et Deus ſolus tempus agnoſcit, quo ea digerere, ac ordinare fas*

erit.

Digitized by Google

erit. Verùm poſt nubila Phœbus. *Benigna illa ſidera, quę ab ipſis primordijs Geometriæ nos deſtinarunt, micantiùs affulxere; tantoque lumine mentem repleuere, vt ipſa non niſi Geometrizando conquieſcens, ad Geometriam, veluti ad ſacram Anchoram, confugerit. Et equidem fato haud auerſo, vt liceat vndique illud rationabiliter vſurpare.*

Perditi eramus, niſi periſſemus.

Contigit namque, pauculis diebus, nouiter excogitare ea omnia, quæ pręſenti libello Tibi comunicanda fore ſtatuimus. Quod eò libentiùs exequimur, quò ſolum tunc primùm ad noſtras peruenit manus. Elementorum Sectio Prima De Corpore Authore Thoma Hobbes Malmesburienſi. *Opus Londini excuſum anno 1655. In ipſoque animaduertere licuit, ab eximio ac celciſſimo viro eorum quædam perſtringi, quæ nos ipſo poſteriores, & in operibus noſtris antehac elaboratis, & in præſenti Opuſculo, conſiderauimus. At nec pęnituit de illis verba feciſſe, nec putamus abſtinendum à præſentium diuulgatione In primis namque ſuis multò plura excogitauimus. Deindè per ſemitas totaliter diuerſas; & tàm ab ipſo, quàm ab alijs (quod ſciamus) incalcatas, perambulauimus. Sed hoc magis fauet, anſamque præbet, quod aliqua ab eo exarata (ipſæ quadraturæ præcipuè, ex quibus ſolis omnia ferè pendent) fundamentis adeò labilibus, infirmiſque ſuperimponuntur, vt dè ipſorum ruina valdè ſit timendum. Eorum quędam non benè percipimus, nobiſque videntur Malleo Geometrico tentata, haud reſiſtere; viuidoque Geometrico igne probata, euolare.*

Digitized by Google

Sed omnibus iam diſpoſitis, ac Typographo conſignatis, apud Bibliopolam quendam, ſe ſe obtulit, Iohannis Vualiſij SS. Th. D. Geometriæ Profeſſoris Sauiliani in Celeberrima Academia Oxonienſi Arithmetica infinitorum. *Oxonij impreſſa, cum duobus alijs tractatibus eidem prępoſitis, anno* 1656. *Hanc ingenti alacritate pretio comparauimus; ac eidem ſtudendæ nos ſecundum totum contulimus. (Ipſam namque etiam anno* 1660. *videre licuit, ſed obiter & per tranſennam. Quum enim impreſſio Opuſculi noſtri,* De infinitorum ſpiralium ſpatiorum menſura *ferè ad calcem redacta eſſet; admonente Clariſſimo Geometra Petro Paulo Carauaggio, curauimus ipſam mutuò receptam, tranſcurrere; vt adnotauimus in digreſſione pręfati tractatui adnexa.) Protinùſque reperimus, in ipſa dedicatione videlicet) egregium virum, profundumque Mathematicum acriter contra Hobbes inuehere ſequentibus verbis.* Ex eo autem tempore, (menſe iam proximè præterito) prodijt Libellus D. Hobbes; qui iam magna pollicitus in Geometria, & ſpeciatim circuli quadraturam angulique in data ratione ſectionem, aliaque his cognata Libellum tandem ſuum in publicum emiſit, quo ſe oſtendit nec horum quicquam præſtitiſſe, nec quidem præſtiturum eſſe; adeo enim turpiſſimis paralogiſmis vbique ſcatet Libellus iſte, vt rarò aliquando quid ſanum inuenias, (quod noſtro iſtius Elencho, qui & iam ſub Prelo eſt, manifeſtum fiet;) vnde & Authorem non eum eſſe facile dignoſcas à quo huiuſmodi myſteria ſperemus retexenda. *Sed ab his alienis propria nos retraxere.*

Digitized by Google

re. *Quod ſuperiùs videlicet*,) *ſua* Noua Methodus inquirendi in curuilineorum quadraturam, aliaque difficiliora Matheſeos Problemata, *tamquam complementum Caualerianæ Methodi Indiuiſibilium venditatur, his verbis*. Nempe inde ortum ſumit hæc noſtra Methodus, vbi Cauallerij Methodus Indiuiſibilium deſinit. Vnde etiam & operi ipſi, ipſique titulo, anſa data eſt; vt enim ille ſuam, Geometriam Indiuiſibilium, ita Ego Methodum noſtram, Arithmeticam infinitorum, nominandam duxi. *Porrò Methodus Caualerij, etiam ipſo Vualliſio teſte, à Geometris paſſim recipitur. Sic namque ait in propoſit. 43. Arithm. Infinit.* At mihi ſufficere videntur illæ quas produxi, Cauallerij Methodum Indiuiſibilium (quoniam eam inuenio à Geometris iam eſſe receptam) ſecutus. *Et in dedicatione de Sectionibus*. Opus ipſum quod attinet; videbitis me, ſtatim ab initio, Cauallerij Methodum Indiuiſibilium, quaſi iam à Geometris paſſim receptam, tàm huic quàm tractatui ſequenti (qui huic gemellus eſt) ſubſternere. *Hunc locum cum tranſcripſiſſemus anno* 1660. *in noſtra citata Digreſſione, non animaduertimus, quæ ipſe ſubnectit poſt parenteſim*, ſed à nobis aliquatenus ſiuè emendatam ſiuè ſaltem immutatam. *Quid autumas?* Immutatam; *parum refert*. Sed emendatam? *Methodi peroptimè fundatæ non emendantur. Et qui hoc præſumit, nihil aliud effutit quam errores & paralogiſmos. Vt ergo (Benigne Lector) nullum patiaris ſcandalum in Caualeriana Methodo, menſurabimus in calce huius tractatuli, Infinita Spatia Spiralia Vualliſij*.

liſij. Expectabimusque tuam innappellabilem ſententiam promulgandam ſuper hoc. Quisnam rectius geometrizauerit; Vualliſius ſua noua Methodo, an nos, anteriorem Caualerij ſequuti. Ferre autem hanc ſententiam facilè Tibi erit, quam iure merito diximus innappellabilem. In Geometricis quippè verſamur. Unus, vel alter noſtrum decipitur, Non datur medium. Quoſdam etiam ad rem noſtram attinentes, (quos errores putamus) in Hobbes manifeſtabimus. Quòd equidem non exequimur ad ſupprimendos viros doctiſſimos, quos ſumma reuerentia proſequimur. Quod ſi, hos, reperiemus aliquos paruulos errores commiſiſſe; non ex hoc immenſa merita erga Rempublicam Geometricam horum Heroum, vel tantillum quidem ſunt minuenda. Homero namque antiquiùs, quò ad rem, putandum eſt Adagium.

Quandoque bonus dormitat Homerus.

His adde, nos prefatis Authoribus quamplurimum debere, perpetuiſque vinculis obſtringi. Vualliſius namque ſemper de Cauallerio preceptore noſtro honorificentiſſimè locutus fuit. Nec verbum ſupra conſideratum aliqualiter officit: quinimmò fauet, cum ex eo Methodi Caualerianæ ſplendor clarius ſit micaturus. Aſt Hobbes profert de ipſomet encomium eximium. Dum in calce cap. 18. diridens pauidos, gregarioſque eos geometras, qui nihil reperiri in Geometria antumant, niſi preſſis antiquorum vijs; ex Archimede, Apollonio, & Cauallerio in Geometricis triumuiratum conſtituit, fando. Poſteriores, excepto Archimede & Apollonio; & noſtris temporibus Bonauentura, nihil eſſe in Geometria vltra horum induſtriam, exiſtiman-

mantes, omnia ex eorum ſcriptis deducenda eſſe, aut inuentu impoſſibilia putarunt. *Relinquamus ergo pro nunc celeberrimos viros Hobbes, & Uualliſium, ac vlterius pergentes, dicamus, in calce huius tractatuli, coronidis loco, propoſita fore quadam ſolida Geometrica infinita, ſeù potiùs infinitè infinita. Quæ vtique non vidimus ab alijs conſiderari. Hæc à nobis nuncupantur* Infinita Conoidea Hyperbolica. *Quorum omnium aſſignamus breuiſſimè & menſuram, & centra grauitatis. Sed rem expedit videre in loco proprio. Interim (mi Lector) Vale.*

Noi Reformatori dello Studio di Padoa.

HAuendo veduto per fede del P. Inquiſ. nel libro quinto intitolato de Infinitis Parabolis del P. F. Steffano de Angelis Veneto, non eſſerui coſa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per atteſtato del Segretario noſtro niente contro Prencipi, e buoni coſtumi, concedemo licenza, che ſij ſtampato, oſſeruandoſi gl'ordini, &c.

Dat. dal Magiſt. noſtro li 30. Maggio 1663.

Andrea Contarini Cau. Proc. Refor.
Nicolò Sagredo Proc. Ref.

Angelo Nicoloſi Segr.

DE

Digitized by Google

DE INFINITIS PARABOLIS

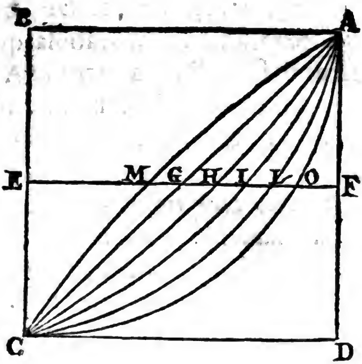
LIBER QVINTVS.

QVATVOR aliquandò libros conſcripſimus, quibus titulum affiximus, *De Infinitis Parabolis*; in primique limine, indolem ipſarum, Caualerij veſtigia inſequentes, haud obſcurè aperuimus, vt inibi licet inſpicere. Suppoſuimus namque, in parallelogrammo BD, actas fuiſſe CGA, CHA, CIA, CLA, aliaſque infinitas diagonales, tali ſtatuta lege, vt iuxta libitum ducta EF, parallela CD, diagonales ipſaſmet ſecante in punctis G, H, I, L, &c. in prima ſit DA, ad AF, vt CD, ad GF; in ſecunda ſit CD, ad HF, induplicata ratione DA, ad AF; in tertia ſit CD, ad IF, in triplicata ratione DA, ad AF; & ſic in infinitum in altioribus po-

teſtatibus. Vndè concluſimus in ſexta deffinitione, hauriri manifeſtè ex ipſarum geneſi, CD, ſeù EF, FG, FH, FI, FL, &c. eſſe magnitudines continuè proportionales. Hæc omnia, cum alijs, videat lector in loco citato, vti etiam ad ipſarum quadraturam attinentia, quæ ex Caualerio ipſomet, quantum ſufficere arbitrabamur, expoſuimus in prima propoſitione, ac in ſcholijs eiuſdem. Nunc conſiderare debemus tantum, quòd in ijs infinitis parabolis incrementa proportionum fiebant per additionem continuam proportionum, primæ æqualium, antecedentibus. Nimirum, proportioni EF, ad FG, addita æquali proportione GF, ad FH, conſurgebat proportio EF, ad FH, duplicata proportionis EF, ad FG. Sic huic addita proportione HF, ad FI, æquali tàm ei EF, ad FG, quàm ei GF, ad FH, oriebatur proportio EF, ad FI, triplicata proportionis EF, ad FG. Et ſic in alijs. Modò harum proportionum progreſſus alia via eſt conſiderandus: ſic nimirum vt ſubſequens proportio minimè addat antecedenti proportionem primæ æqualem, (*quam Radicalem dicere poterimus*) ſed eius dimidiatam. V. g. ſi ſupponamus EF, ad FI, habere duplicatam proportionem eius, quam habet EF, ad FG, inter GF, FI, ſit media FH: EF ad FH, habebit integram, & dimidiatam, ſeu ſeſquialteram proportionem eius, quam habet EF, ad FG, nempe radicalis. Sic ſi ſupponamus EF, ad FH, habere duplicatam proportionem eius, quam habet EF, ad FG, & EF,

ad

Digitized by Google



ad FL, triplicatam (modò FI, ſit media inter HF, FL) EF, ad FI, habebit proportionem duplicatam, & dimidiatam ſimul, ſeu duplam ſeſquialteram eius, quam habet EF, ad FG. Si ergo intelligamus per omnia puncta extrema harum mediarum ductas fore diagonales, &c. (vti etiam factum fuit in alijs, quas antea explicauimus) tenebimus alias infinitas parabolas, quæ ad priores relatæ poterunt dici *Intermediæ*, quia mediant inter eas. Et omnes ſimùl conſtituent ſeriem infinitam à prioribus diuerſam.

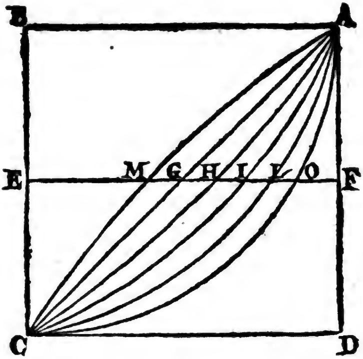
Verùm hæc infinita ſeries adhuc non eſt integrè regulata, ac ordinata; quia nequaquam procedit in omnibus per æqualia incrementa proportionum. Nam proportio EF, ad FG, eſt duplicata proportionis GF, ad FH. Rectè autem, & integrè ordi-

nabitur, ſi etiam proportio EF, ad FG, dimidietur; hoc eſt reperiatur media inter EF, FG. Hoc autem tantum præſtabit ſemiparabola quadratica CKAD, cuius baſis CD, diameter DA. In ipſa namque eſt quadratum CD, ſeù EF, ad quadratum KF, vt DA, ad AF; nempe CD, vel EF, ad FG.

Tali autem pacto tenebimus binas ſeries infinitas, trilineorum vnam, parabolarum alteram. Et in prima erit primum trilineum ſemiparabola quadratica CkAD: ſecundum triangulum CGAD: tertium trilineum CHAD, medium inter triangulum, & trilineum quadraticum CIAD: quartum dictum trilineum quadraticum: & ſic in alijs. In ſerie autem ſemiparabolarum, erit prima ſemiparabola trilineum quadraticum CKAB: ſecunda triangulum CGAB: tertia ſemiparabola intermedia CHAB, &c.

Ex quibus apparet manifeſtè, quod ſi tota ſimul ſumatur ſeries, numerus ordinatorum variatur, ita vt omnium ordinatorum numeri in prima ſerie, quæ dici poterit *Principalium*, ſint in tota ſerie pares, & dupli numerorum in ſerie principalium. V.g. numerus trilinei linearis, ſeu trianguli, in ſerie principalium erat impar, nempe 1. nunc euadet par, & duplus vnitatis, nempe 2. Sic numerus trilinei quadratici, qui erat 2. euadet 4. Trilinei verò cubici, qui erat 3. fiet 6. &c. Numeri verò intermediarum erunt omnes impares.

In

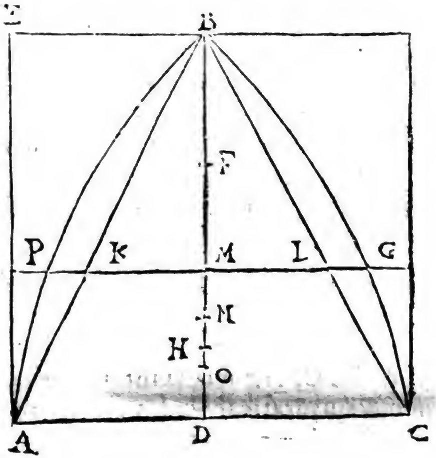


In poſterum conſiderabimus, vel totam ſeriem, vel ſeries principalium, vel intermediarum ſolummodò iuxta exigentiam. Pro quadratura tamen intermediarum, ipſarumque cognitione ſufficit quadratura principalium tantum, vt ſtatim apparebit.

Præſupponendum verò eſt pro dicendorum notitia, deinceps nos paſſim, & vbique vſurpaturos fore terminos omnes, quos in alijs prioribus aliquandò explicauimus, præcipue in opere *De Infinitis Parabolis*. Sit ergo

PROPOSITIO PRIMA.

In tota ſerie Cylindrus circumſcriptus cuilibet conoidi, cuius numerus ſit numerus par, erit ad ipſum, vt parallelogram-

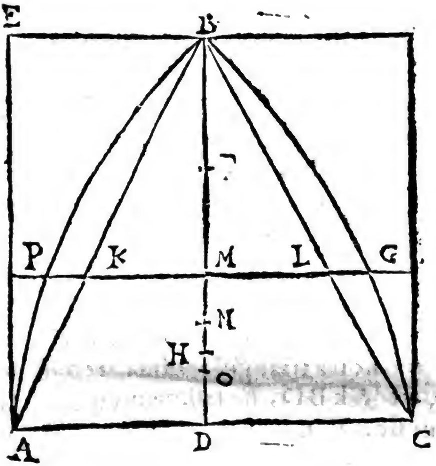


eſt vt DB, ad BM, ſic poteſtas AD, congruens parabolæ ad ſimilem poteſtatem kM. Ergo vt congruens poteſtas AD, vel QM, in conoide ad ſimilem poteſtatem PM, ſic in parabola congruens poteſtas AD, vel QM, ad ſimilem poteſtatem kM; vel vt multiplicata proportio QM, ad MP, in conoide quotus eſt ſuus numerus, ſic multiplicata proportio QM; ad Mk, in parabola quotus eſt ſuus numerus. Cum verò numerus conoidis ſit duplus numeri parabolæ, etiam proportio multiplicata QM, ad MP, erit duplicata proportionis multiplicatæ QM, ad MK.

Qua-

Quare erit etiam, vt quælibet pars proportionis multiplicatæ QM, ad MP, ſic ſimilis pars proportionis multiplicatæ QM, ad MK. Sed ſimilis pars proportionis duplicatæ QM, ad MP, eſt proportio QM, ad Mk. Ergo vt duplicata proportio QM, ad MP, ſic QM, ad Mk. Sed antequam vlteriùs procedatur, lubet vno, vel altero exemplo explicare ſupradicta, quæ in tali vniuerſalitate nimis videntur obſcura. Supponamus APBC, e.g. eſſe conoides parabolicum cubicum, cuius numerus in tota ſerie eſt 6: & vt DB, ad BM, ſic cubus QM, ad cubum MP; nempe proportio triplicata proportionis QM, ad MP. In tali caſu parabola AKBC, erit media inter linearem, ſeu triangulum, & quadraticam, cuius numerus erit 3. & DB, ad BM, erit in vnica & dimidiata proportione QM, ad Mk; nempe in eius ſeſquialtera. Ergo erit etiam, vt triplicata proportio QM, ad MP, ſic vnica, & dimidiata proportio QM, ad Mk. Sed eadem pars eſt duplicata proportio QM, ad MP, triplicatæ proportionis QM, ad MP, ac vnica proportio QM, ad Mk, vnicæ & dimidiatæ proportionis QM, ad Mk, (vtraque enim eſt prioris ſubſeſquialtera.) Ergo erit etiam, vt duplicata proportio QM, ad MP, ſeu vt quadratum QM, ad quadratum MP, ſic vnica proportio QM, ad MK; nempe ſic linea QM, ad ipſam Mk. Sic ſi ſupponamus APBC, conoides eſſe quadrato cubicum, cuius numerus erit denarius, parabola erit

media



media inter quadraticam, & cubicam, & eius numerus quinarius. Et in conoide erit DB, ad BM, in quintuplicata proportione QM, ad MP: & in parabola erit DB, ad BM, in duplicata, & dimidiata proportione QM, ad Mk. Eædem ergo erunt proportiones quintuplicata QM, ad MP, & duplicata cum dimidiata QM, ad MK. Cumque eadem ſit pars duplicata QM, ad MP, eius quintuplicatæ, ac ſimplex QM, ad Mk, eius duplicatæ, & dimidiatæ. Erit etiam, vt duplicata proportio QM, ad MP, ſeu vt quadratum QM, ad quadra-

tum MP, ſic QM, ad Mk. Sic lector experietur ſi exemplificabit in alijs.

Cum ergo ſit vniuerſaliter vt duplicata proportio QM, ad MP; nimirum vt quadratum QM, ad quadratum MP, ſic QM, ad Mk. Et vt quadratum ad quadratum, ſic circulus radij QM, ad circulum radij PM. Erit etiam vt circulus ad circulum, ſic QM, ad Mk. Sed punctum M, acceptum fuit arbitrariè. Ergo vt omnes circuli cylindri ad omnes circulos conoidis, ſic omnes lineæ rectanguli ad omnes lineas parabolæ. Nempe, vt cylindrus ad conoides, ſic rectangulum ad parabolam.

Adnotetur autem, quòd hic diſcurſus valet a triangulo ſupra, non a triangulo infra. Si enim APBC, ſit conus, vt AkBD, ſit trilineum quadraticum, diſcurretur ſic. Vt quadratum BD, ad quadratum BM, ſic tàm quadratum QM, ad quadratum PM, quàm QM, ad MK. Et ſic in omnibus.

Quòd verò dictum eſt de totis, eodem modo probabitur de partibus proportionalibus. V. g. eodem modo probabitur eſſe cylindrum QC, ad fruſtum conoidale APGC, ac rectangulum QD, ad fruſtum parabolicum AkMD. Ergo in omnibus, & per omnia patet propoſitum. Quod &c.

SCHOLIVM I.

Cum ergo in propoſit. 15. libri 2. de Infinitis Parabolis tradita ſit ratio, quam habent cylindri circum

cumſcripti ad omnia conoidea parabolica contenta in ſerie principalium, quæ etiam ſunt illa omnia contenta in tota ſerie, quorum numeri ſunt pares: conſequenter, ex cit. loco, poterimus deducere quadraturam omnium parabolarum.

Attamen animaduertetur, quòd in citata propoſ. pro eliciendis menſuris conoideorum in ſerie principalium, vſi ſumus quadraturis omnium trilineorum; & conſequenter ſemiparabolarum ipſarum genitricium. Vndè, nunc vellè deducere talium ſemiparabolarum quadraturas ex menſuris conoideorum ex ipſis genitorum, aliud non eſſet quam circulare. Quod vtique verum eſt. Sed attamen non modo hauritur quadratura tantum ſemiparabolarum principalium (in quo caſu fieret vtique circulatio,) ſed etiam omnium intermediarum; quæ minimè inſeruiebant menſuris conoideorum principalium. Benè ergo diximus ſupra, quadraturam principalium ſufficere ad quadrandas etiam intermedias. Nam principalium quadratura parit menſuram omnium conoideorum principalium. Illa conoidea, quorum numeri in ſerie principalium ſunt impares inſeruiunt quadraturis omnium intermediarum. Quare omnia pendent ex principalium quadratura.

SCHOLIVM II.

Propiùs ergo ad rem accedentes, poterimus ſtatuere

Digitized by Google

tuere in tota ſerie, eſſe parallelogrammum circumſcriptum parabolæ ad ipſam, vt numerus parabolæ binario auctus ad numerum parabolæ. Nempe in prima, quæ patuit ſupra trilineum parabolicum quadraticum, vt 3. ad 1. In ſecunda, quæ pariter patuit triangulum, vt 4. ad 2. In tertia, quæ mediat inter triangulum, & parabolam quadraticam, vt 5. ad 3. Et ſic in alijs. Nam ex citata propoſit. 15. eſt cylindrus circumſcriptus conoidibus principalibus ad ipſa, vt numerus binario auctus ad numerum. Numerus autem binario auctus, & numerus in ſerie principalium, idem eſt cum numero binario aucto, & cum numero in tota ſerie illius parabolæ cuius numerus ſit ſubduplus illius numeri, qui exponit numerum principalis in tota ſerie locati, vt manifeſtè patet.

Poterimus ergo dicere, in tota ſerie, eſſe per conuerſionem rationis, parallelogrammum ad ipſa infinita trilinea, vt numerus binario auctus ad binarium. Nempe in primo, quod eſt parabola quadratica, vt 3. ad 2. In ſecundo, quod eſt triangulum, vt 4. ad 2. In tertio, vt 5. ad 2. & ſic in alijs.

Cum verò triangulum ſit dimidium parallelogrammi, erit ad quodlibet ex infinitis trilineis, vt dimidium numeri auctum vnitate ad binarium: nempe vt numerus binario auctus ad quaternarium. Quare quandò triangulum excedit trilineum (non enim ſemper excedet, ſed incipiendo à trilineo intermedio inter ipſum triangulum, & trilineum parabolicum quadraticum) erit per conuerſionem rationis

nis ad exceſſum ipſius ſupra trilineum, vt numerus binario auctus ad exceſſum ſupra quaternarium.

SCHOLIVM III.

Porrò non tantum in cit. propoſit. 15. traduntur menſuræ omnium conoideorum principalium, ſed etiam ſegmentorum omnium ipſorum reſectorum planis baſibus parallelis, & hoc quidem in ſchol. 2. eiuſdem propoſitionis. Cum verò probatum ſit eſſe cylindros ad ipſa conoidea, vt rectangula ad ipſas parabolas ſupra expoſitas & ſecundum totum, & ſecundum partes proportionales; habebimus conſequenter rationes rectangulorum circumſcriptorum omnibus ſegmentis parabolarum reſectarum lineis baſibus parallelis ad ipſa ſegmenta.

SCHOLIVM IV.

Poſtremo loco adnotetur, quòd ex noſtris doctrinis generalibus expoſitis in lib. 4. de Infinitis Parab. & paſſim vſurpatis in alijs operibus, quas ſubindè publicauimus, deducitur manifeſtè, conoidea omnia in ſerie principalium, & omnes parabolas in tota ſerie fore magnitudines proportionaliter analogas, tàm in ratione magnitudinis, quàm grauitatis, tàm ſecundum totum, quàm ſecundum partes proportionales. Vndè ſi aliquando reperiemus centra grauitatis parabolarum omnium in tota ſerie (quod vti-

que

Digitized by Google

que ſtatim explebimus) aſſignabimus quoque centra grauitatis conoideorum in ſerie principalium, non quidem tantum quorum numeri ſunt pares, vt fecimus in propoſit. 14. lib. 4. ſed etiam quorum numeri ſunt impares. Quòd numquam in noſtris operibus ante elaboratis præſtitimus.

PROPOSITIO II.

Centra grauitatis, tàm infinitarum parabolarum, quàm infinitorum trilineorum in tota ſerie, ſic diuidunt eorum axim, vt pars terminata ad verticem, ſit ad aliam, vt parallelogrammum ipſis circumſcriptum, ad ipſas figuras.

HÆc propoſitio facilè patet ex dictis in libris alijs de Infinitis Parabolis. Nam propoſit. 12. lib. 2. verificatur etiam de his figuris, quia ſunt eiuſdem indolis cum illis. Propoſit. 1. lib. 3. eſt vniuerſaliſſima. Quare etiam propoſit. 2. facilè applicata his figuris præſtabit propoſitum.

SCHOLIVM I.

Ex ſchol. ergo 2. propoſit. anteced. poterimus ſtatuere, centrum grauitatis infinitarum parabolarum totius ſeriei ſic diuidere earum axim, vt pars ad verticem ſit ad reliquam, vt numerus binario auctus ad numerum. Item centrum grauitatis infinitorum trilineo-

lineorum totius ſeriei diuidere axim, vt pars ad verticem ſit ad reliquam, vt numerus binario auctus ad binarium.

Cum verò quodlibet conoides in tota ſerie ſit probatum proportionaliter analogum cum parabola, cuius numerus ſit ſubduplus ſui numeri in tota ſerie: cumque talia conoidea ſint omnia ea, quorum numeri ſunt pares: nempe omnia ea, quæ conſtituunt ſeriem principalium: omnium horum habebimus centra grauitatis. Ad quæ aſſignanda mirabiliter inſeruiunt omnes infinitæ parabolæ totius ſeriei. Trilineum ergo parabolicum quadraticum inſeruiet inuentioni centri grauitatis coni. Triangulum, conoidis parabolici quadratici. Parabola media inter triangulum & parabolam quadraticam, conoidis cubici. Et ſic in reliquis. Secabitur ergo ſic axis cuiuslibet conoidis, cuius numerus par in tota ſerie à ſuo centro grauitatis, vt pars terminans ad verticem ſit ad reliquam, vt dimidium eius numeri auctum binario, ad dimidium numeri (quia numerus parabolæ cum ipſo proportionaliter analogæ eſt ſubduplus numeri ipſius.) Cumque numerus eius ſubduplus in tota ſerie ſit eius numerus in ſerie principalium, vt ſupra explicatum fuit, & vt clariſſimè patet. Hinc vniuerſaliter, breuiterque licebit ſtatuere.

Centrum grauitatis cuiuslibet conoidis ſeriei principalis diuidit axim, vt pars ad verticem ſit ad reliquam, vt numerus conoidis binario auctus ad numerum.

Digitized by Google

merum. In cono, vt 3. ad 1. in quadratico vt 4. ad 2. In cubico, vt 5. ad 3. Et ſic in infinitum.

SCHOLIVM II.

Hìc liceret ampliare multas doctrinas expoſitas in noſtris quatuor libris de Infinitis Parab. & in alijs noſtris operibus. Quæ omnia conſultò remittimus diligentiæ lectorum. Nos in præſenti tantum aliqua principalia adnotabimus.

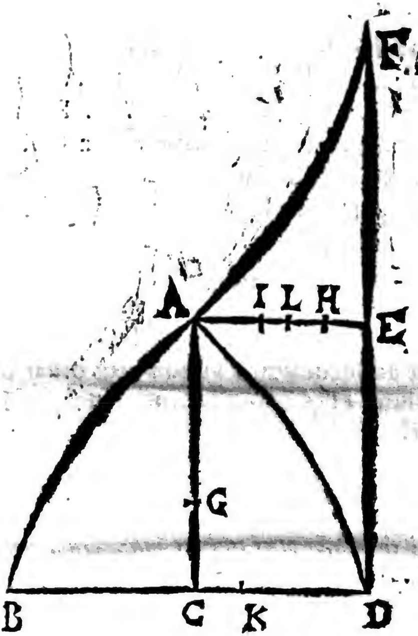
PROPOSITIO III.

Centrum æquilibrij cuiuslibet ſemiparabolæ in tota ſerie appenſæ ſecundum baſim, ſic ipſam diuidit, vt pars terminans ad curuam, ſit ad terminatam ad axim, vt numerus ſenario auctus, ad numerum binario auctum.

HÆc propoſitio deducetur ex pulcherrima propoſit. 20. exercit. 5. Caualerij, ex qua deduxit centra æquilibrij in baſibus infinitarum ſemiparabolarum principalium. Propoſitio autem Caualerij talis eſt.

Si H, ſit centrum grauitatis duplicati trilinei F A D, ſeu æquilibrij A E D, appenſi ſecundum A E, & D C, ſic diuidatur in K, vt ſit ſicut A E, cum E H, ad A H, ſic D K, ad K C. K, erit centrum æquilibrij ſemiparabolæ A D C, appenſæ ſecundum D C. Cum enim ex ſchol. 1. propoſit. anteced. ſit A H,

ad



ad HE, vt numerus binario auctus ad binarium: erit AE, cum EH, ad AH, vt numerus ſenario auctus ad numerum binario auctum. Et ſic etiam erit Dk, ad kC.

SCHOLIVM.

Sicuti ex generali propoſit. 4. lib. 3. libet inferre, quòd ſi ſemiparabola CAD, totius ſeriei rotetur prius circa ED, deinde circa AC. Primum ſolidum erit ad ſecundum, vt numerus ſenario auctus, ad numerum binario auctum.

Si verò parabola BAD, rotetur prius circa AE, deinde circa BD. Primum ſolidum erit ad ſecundum, vt numerus binario auctus ad numerum:

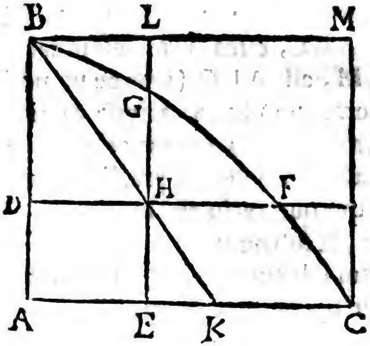
Si autem duplicatum trilineum FAD, gyretur prius circa AC, poſtea circa FD. Primum ſolidum erit ad ſecundum, vt numerus binario auctus, ad binarium. Hæc namque omnia ſunt, ex dictis, nimis clara.

PROPOSITIO IV.

Cylindrus circumſcriptus cuilibet infinitorum conoideorum in tota ſerie, eſt ad ipſum, vt numerus quaternario auctus, ad numerum. Ad ſolidum verò ortum ex reuolutione ſemiparabolæ circa latus rectanguli, ſibi circumſcripti, axi parallelum, vt numerus rectanguli ſub numero binario aucto, & ſub numero quaternario aucto, ad numerum rectanguli ſub numero, & ſub numero ſenario aucto.

HÆc propoſitio probari poteſt, & ad modum propoſit. 15. libro 2. & ex propoſit. 3. lib. 3.

Pro-



Probabimus autem ipſam ex ipſa propoſit. 3. Sit ergo quælibet ſemiparabola ABC, totius ſeriei, cui ſit circumſcriptum rectangulum AM, & ſit E, centrum æquilibrij ſemiparabolæ ABC, appenſæ ſecundum baſim AC. Ex doctrina ergo tradita in dicta propoſit. 3. cylindrus ex AM, circa AB, ad conoides, habet rationem compoſitam ex ratione rectanguli AM, ad ſemiparabolam, & ex ratione dimidiæ AC, ad AE. AM, ad ABC, eſt vt numerus binario auctus ad numerum, ex ſchol. 2. propoſit. 1. Dimidia AC, eſt ad AE, vt numerus quaternario auctus ad numerum binario auctum, ex propoſit. antecedente. Ergo cylindrus ad conoides erit in ratione ex his compoſita. Nempe, propter commune latus numerum binario auctum, vt numerus quaternario auctus, ad numerum. Quod &c.

Digitized by Google

Secunda pars facilè patebit ex eadem propoſit. Cylindrus namque ex AM, circa MC, ad ſolidum ex ABC, circa CM, eſt in ratione compoſita ex AM, ad ABC (nempe numeri binario aucti ad numerum) & ex ratione dimidiæ AC, ad EC (nempe numeri quaternario aucti ad numerum ſenario auctum.) Sed ex prædictis rationibus componitur quoque ratio rectanguli ſub numero binario aucto, & ſub numero quaternario aucto, ad rectangulum ſub numero, & ſub numero ſenario aucto. Ergo patet propoſitum.

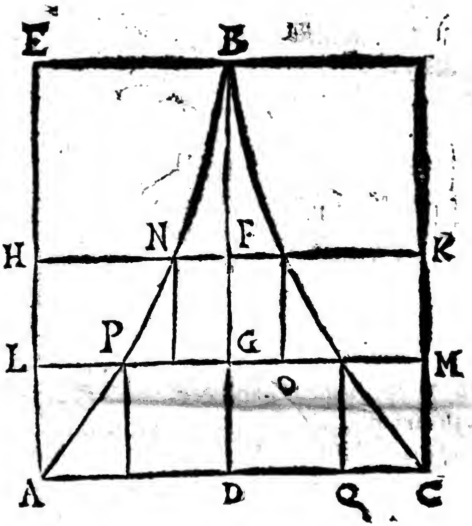
SCHOLIVM.

Ex prima parte ergo præſentis propoſitionis elicitur, quod per conuerſionem rationis, erit cylindrus ex AM, ad ſui exceſſum ſupra conoides, nempe ad ſolidum ortum ex reuolutione trilinei BMC, circa BA, vt numerus quaternario auctus ad quaternarium.

PROPOSITIO V.

Cylindrus circumſcriptus cuilibet infinitorum conicorum, eſt ad ipſum, vt parallelogrammum circumſcriptum trilineo, cuius numerus ſit duplus numeri conici, ad ipſum trilineum, tàm ſecundum totum, quàm ſecundum partes proportionales.

Hæc



HÆc propoſitio probabitur ad modum propoſit.4. lib.4. Conicus ſit ABC, cum cylindro circumſcripto EC; & pariter, pro confuſione vitanda, ſupponamus ABD, eſſe aliud trilineum cum rectangulo ED, circumſcripto, cuius numerus ſit duplus conici. Dico eſſe cylindrum ad conicum, vt rectangulum ad trilineum. Accipiatur arbitrariè punctum F, & in conico tranſeat planum HK, in trilineo linea HF, quæ omnia ſint parallela, illud plano AC, hæc lineæ AD, iuxta conſuetum.

tum. In conico eſt vt poteſtas DB, congruens conico, ad ſimilem poteſtatem BF, ſic HF, ad FN. Similiter ſic in trilineo. Sed cum numerus trilinei ſit duplus numeri conici, etiam poteſtas DB, congruens trilineo erit duplicata poteſtatis DB, congruentis conico. Quare etiam ratio HF, ad FN, in trilineo, erit duplicata rationis HF, ad FN, in conico. Cum verò ſit vt poteſtas DB, congruens trilineo ad ſimilem poteſtatem BF, ſic AD, ſeù HF, ad FN. Ergo etiam vt quadratum HF, ad quadratum FN, in conico (ſeù vt circulus radij HF, ad circulum radij FN, in conico) ſic HF, ad FN, in trilineo. Et ſic vbilibet. Facilè ergo concludetur propoſitum. Quod &c.

SCHOLIVM I.

Cum ergo ex ſchol. 2. propoſit. 1. ſit rectangulum ad quodlibet trilineum totius ſeriei, vt numerus binario auctus ad binarium; & cum numerus trilinei ſupponatur duplus numeri conici, poterimus ſtatuere. Fore cylindrum ad conicum totius ſeriei, vt duplus numerus binario auctus, ad binarium. Seu vt numerus vnitate auctus ad vnitatem. Et per conuerſionem rationis, erit cylindrus ad annulos ortos ex reuolutione ſemiparabolarum AEB, circa BD, parallelam baſi EA, vt numerus vnitate auctus ad numerum.

SCHO-

SCHOLIVM II.

Sed & imitando expoſita in noſtris operibus, infinita poſſent deduci de his infinitis parabolis totius ſeriei. Quæ omnia, lector proprio poterit marte experiri, ſi obſeruauerit modos, quibus vſi ſumus ad ea omnia probanda. Nos namque tantum expoſuimus ea, ex quibus percipi poteſt admirabilis analogia in his magnitudinibus reperta, quam lectorem cupimus diligenter ad memoriam reuocare. Inferiùs namque habebit, vndè delectabiliter myſteria geometrica admiretur. Conſideret ergo lector, qualiter quadratura parabolarum principalium inſeruiat menſuris omnium conoideorum principalium. Sed cum facilè teneamus centra grauitatis parabolarum principalium; & cum hæ ſint proportionaliter analogæ cum conoidibus principalibus, quorum numeri ſunt pares: tenebimus etiam horum centra grauitatis. Porrò omnia conoidea principalia ſunt proportionaliter analoga cum omnibus parabolis totius ſeriei; ergo habita menſura omnium conoideorum principalium ex quadratura parabolarum principalium, habebimus etiam quadraturas omnium parabolarum in tota ſerie. Habitis quadraturis omnium harum, habebimus etiam tàm centra grauitatis ipſarum, quam æquilibrij ipſarum dimidiarum ſecundum baſim appenſarum. Ex quadraturis ipſarum, & ex prædictis centris æquilibrij, tenebimus menſuras

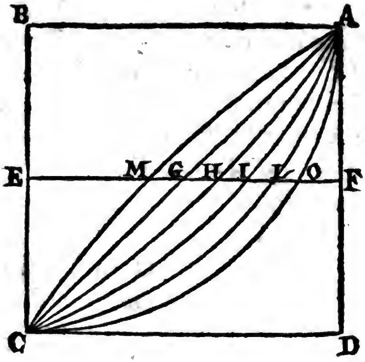
ras

ras omnium conoideorum ex ipſis genitorum. Porrò cum omnes hæ parabolæ totius ſeriei ſint proportionaliter analogæ cum omnibus conoidibus principalibus: omnium horum tenebimus centra grauitatis. Sed hucuſque non habebimus centra grauitatis omnium conoideorum totius ſeriei, nempe intermediorum. Aſt quo pacto etiam hæc deducantur, nunc eſt explicandum.

SCHOLIVM III.

Initio ergo tradidimus qualiter inueniantur ſemiparabolæ intermediæ. Diximus enim, quòd ſi v.g. COAD, ſit trilineum parabolicum quadraticum, & CGAD, triangulum, vt acta EF, parallela CD, ſint tres continuè proportionales EF, FG, FO, & tam ratio EF, ad FG, quàm GF, ad FO, ſubduplicetur in I, & M, & idem dicatur accidere de alijs parallelis CD, & intelligamus diagonales CIA, CMA: diximus inquam, haberi duplam ſeriem infinitam; nimirum infinitorum trilineorum, & infinitarum ſemiparabolarum. Quælibet ergo proportio radicalis eſt ſubduplicata. Modò iterum quælibet hæc ſubduplicata ſubduplicetur, vt quælibet talis proportio ſit ſubquadruplicata radicalis. V.g. ratio radicalis GF, ad FO, quam habet ordinatim applicata in triangulo, ad ordinatim applicatam in trilineo parabolico quadratico, eſt ſubduplicata in *I*, per diagonalem intermedium CIA;

tàm



tàm ergo ratio GF, ad FI, ſubduplicetur per diagonalem CHA, quàm ratio IF, ad FO, ſubduplicetur per diagonalem CLA. Idem intelligamus de alijs rationibus radicalibus, & intermedijs in altioribus trilineis. Habebimus etiam modò duas infinitas ſeries, trilineorum nempe, & ſemiparabolarum, ampliores iam explicatis. Quæ tamen ſeries nondum ſunt completè regulatæ. Regulabuntur autem perfectè ſi etiam rationes EF, ad Fk, dimidia in ſequenti ſchemate rationis EF, ad FG, & FK, ad FG, ſubduplicentur per diagonales CMA, & CNA. CMAD, enim erit ſemiparabola quadratoquadratica, & CNAD, intermedia inter triangulum, & ſemiparabolam quadraticam (cuius natura nondùm innotuit, ſed infra explicabitur) &

Digitized by Google

harum erunt axis A D, baſis C D. Series ergo totalis horum trilineorum (quæ ad diſtinctionem prius explicatæ poterit nuncupari. *Trium intermediarum, veluti illa vnius intermediæ*) ortum ducit à C M A D, ſemiparabola quadratoquadratica. Succedit deinde C K A D, ſemiparabola quadratica. Poſtea intermedia C N A D. Triangulum C G A D. Trilinea intermedia C H A D, C I A D, C L A D, quadraticum C O A D. Et ſic in infinitum. Series autem ſemiparabolarum originatur à trilineis quadratoquadratico, quadratico, intermedio, triangulo &c.

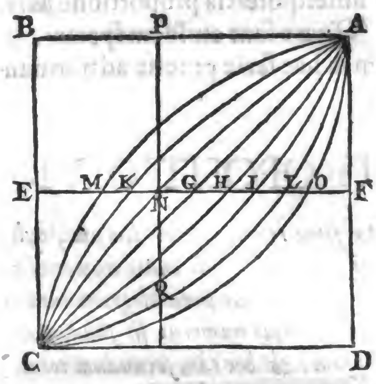
In hac ſerie trium intermediarum tàm trilinea, quàm parabolæ ſeriei vnius intermediæ antecedentis habebunt omnes numeros pares, & duplos eorum, quos occupabant in ſerie vnius intermediæ. Parabolæ autem, & trilinea ſeriei principalis habebunt pariter omnes numeros pares, & quadruplos illorum quos habebant in ſerie principalium. Quod vnicuique patebit faciliter.

SCHOLIVM IV.

Porrò naturam ſemiparabolæ C N A D, ſic indagabimus. Supponamus C L A D, eſſe trilineum quadraticum, & ratio G F, ad F L, ſubtriplicetur in H, vt F H, ſit maior duarum mediarum inter G F, F L, terminos proportionis æqualis radicali; & intelligamus diagonalem C H A. Semiparabo-

la

Digitized by Google



la CNAD, erit eiuſdem ſpeciei cum ſemiparabola CHAB. Cum enim inter EF, FG, ſint tres mediæ MF, FK, FN, ratio EF, ſeù CD, ad NF, erit ſubſeſquitertia proportionis radicalis CD, ad GF, ſeù DA, ad AF. Pariter cum ratio GF, ad FH, ſit $\frac{1}{3}$. proportionis radicalis; erit proportio EF, ad FH, ſeſquitertia proportionis radicalis EF, ad FG, ſeù DA, ad AF. Quare DA, ad AF, conuertendo, (nempe CB, ordinatim applicata in ſemiparabola CHAB,) ad FA, (æqualem ordinatim applicatæ in eadem ſemiparabola à puncto H) erit in ſubſeſquitertia proportione EF, ſeù BA, axis eiuſdem, ad HF, æqualem portioni axis, quam abſcindit ordinatim applicata à puncto H. Sed & ſupra CD, ad NF, or-

Digitized by Google

dinatim applicatam in ſemiparabola CNAD, eſt probata in ſubſeſquitertia proportione axis DA, ad axim AF. Quare ſunt eiuſdem ſpeciei.

Aſt etiam in hac ſerie poterit ad normam propoſ. 1. proponi.

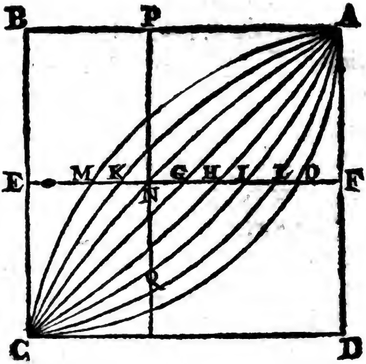
PROPOSITIO VI.

Etiam in tota ſerie trium intermediarum, cylindrus circumſcriptus cuilibet conoidi cuius numerus ſit numerus par, erit ad ipſum, vt parallelogrammum circumſcriptum parabolæ, cuius numerus ſit ſubduplus numeri conoidis, ad ipſam: & hoc tàm ſecundum totum, quàm ſecundum partes proportionales.

HÆc verò propoſitio conſtabit eodem modo, quo ſupra patuit propoſit. prima. Quapropter omittitur demonſtratio. Solum aliqua poteſt eſſe difficultas à triangulo infra, non à triangulo ſupra; & in hac non à trilineis CMAB, quadratoquadratico, & CkAB, quadratico (in his enim tàm in propoſit. 4. lib. 4. quàm in propoſit. anteced. patuit fore rectangulum DB, ad trilineum CMAB, vt cylindrus ex DB, ad conicum ex CkAB, reuolutis omnibus circa BA, diametrum.) Sed ſolum in trilineo CNAB, ex ſemiparabola CNAD. Hoc enim, iuxta hanc regulam, deberet eſſe proportionaliter analogum cum conoide ex ſemiparabola CIAB, reuoluta circa ſuum axim BA, (ſuppo-

po-

Digitized by Google



ponendo hanc eſſe vnicam mediam iam ſupra explicatam inter triangulum, & ſemiparabolam quadraticam, hoc eſt rationem GF, ad FI, eſſe dimidiatam radicalis EF, ad FG, & rationem EF, ad FI, ſeſquialteram radicalis.) Sed hoc verum eſſe facilè deducetur. Nam, ex dictis ſupra, proportio CD, ad NF, eſt ſubſeſquitertia proportionis DA, ad AF. Conuertendo ergo, DA, ſeù CB, baſis trilinei CNAB, erit ad FA, ſeù NP, ordinatim applicatam in ipſo à puncto N, in ſeſquitertia proportione CD, ſeù BA, axis eiuſdem, ad NF, ſeù PA, portionem axis abſciſſam verſus verticem ab eadem ordinatim applicata. Pariter quoniam CI, AB, ſupponitur ſemiparabola media inter triangulum, & quadraticam, ordinatim applicatæ erunt ad

inui-

inuicem in ſubſeſquialtera proportione partium axis. Si ergo intelligamus ordinatim applicatam QP, in ſemiparabola CIAB; CB, ad NP, ordinatim applicatam in trilineo, erit in ſeſquitertia proportione axis BA, ad AP: & CB, eadem erit ad ordinatim applicatam in ſemiparabola in ſubſeſquialtera proportione axis BA, ad eundem axim AP. Cæterum ea proportio, quæ eſt ſubſeſquialtera alicuius proportionis, eius duplicata eſt ſeſquitertia eiuſdem. Ergo proportio duplicata CB, ad QP (nempe quadrati CB, ad quadratum QP) erit ſeſquitertia proportionis BA, ad AP. Sed & huius ſeſquitertia proportio CB, ad NP. Ergo vt CB, ad PN, ſic quadratum CB, ad quadratum QP. Ex quibus expertus in methodo Caualeriana indiuiſibilium deducet propoſitum.

SCHOLIVM I.

Etiam ergo ſcholia appoſita propoſitioni primæ ritè poterunt huic adiungi. Porrò cum omnia hæc conoidea quorum exponentes in tota ſerie trium intermediarum ſunt numeri pares, ſint omnia conoidea totius ſeriei vnius intermediæ; & cum omnium horum menſuræ ſupra fuerint explicatæ: conſequenter tenebimus quadraturas omnium harum parabolarum; earum centra grauitatis; & æquilibrij in baſibus. Et conſequenter menſuras omnium conoideorum, & omnia ſupra expoſita.

SCHO-

SCHOLIVM II.

Nunc cogitemus quamlibet rationem huius ſeriei ſubduplicari, ſeù rationem radicalem ſub octuplicari per ſeptem diagonales intermedias. Tenebimus binas ſeries, quæ *Septem intermediarum appellitari poterunt*. Et ſic licebit in infinitum procedere ſubduplicando rationem ſeriei antecedentis. Sic namque infinitè infinitas ſeries trilineorum, & parabolarum procreabimus, ſic vt ſeries infinitorum trilineorum ortum ducant à ſemiparabolis, quarum prima in ſerie principalium occupabit numerum vnitate excedentem numerum terminorum per quos diuiditur ratio radicalis. Series verò infinitarum ſemiparabolarum incipient à trilineis eiuſdem rationis cum ſemiparabolis, à quibus ortum ducebat ſeries trilineorum.

Verum ſolidorum omnium ex his figuris genitorum tenebimus menſuras, & centra grauitatis. Et verbo, omnia, quæ in noſtris operibus antea elaboratis probata ac patefacta fuere de his figuris, vel ſolidis principalibus, poterunt ſuo modo applicari ijs harum ſerierum. Quæ tamen omnia libenter omittimus. Solum aſſignabimus regulas generales circa aliqua, quorum notitia deinceps indigebimus.

Prima regula generalis, quam vnuſquiſque poterit experiri talis eſt.

Re-

Rectangulum circumſcriptum cuilibet ex infinitis parabolis ſupra explicatis, eſt ad ipſam, vt numerus quem ipſa occupat in ſua ſerie, auctus tot vnitatibus vna plus quot ſunt mediæ, per quas ſecatur ratio radicalis, ad ipſum numerum. V. g. ſi nulla ſit media, ſed ſeries ſit principalium, vt numerus vnitate auctus, ad numerum. Si vna ſit intermedia, vt numerus binario auctus ad numerum. Si tres ſint intermediæ, vt numerus quaternario auctus ad numerum. Et ſic in infinitum.

Secunda regula. Ergo per conuerſionem rationis. Erit rectangulum ad quodlibet ex infinitis trilineis, vt idem antecedens ad numerum ipſarum mediarum vnitate auctum.

Tertia regula. Centra grauitatis dictarum figurarum ſecant earum axes, vt partes ad verticem ſint ad partes ad baſim in proportionibus explicatis in duabus regulis ſuperioribus.

Quarta regula, quæ facilè deducetur ex explicatis in ſchol. 2. propoſit. 2. lib. 3. ex aurea doctrina Cauaſerij, eſt. Quòd centrum æquilibrij cuiuslibet ſemiparabolæ explicatæ appenſæ ſecundum baſim, ſic ipſam diuidit, vt pars terminans ad curuam, ſit ad terminatam ad axim, vt numerus, quem ipſa occupat in ſua ſerie auctus tribus vicibus, tot vnitatibus vna plus, quot ſunt mediæ per quas ſecatur ratio radicalis, ad ipſum numerum auctum ijſdem vnitatibus ſemel ſumptis. V. g. ſi nulla ſit media, vt numerus tribus vnitatibus auctus ad numerum vnitate auctum.

ctum. Si vna, vt numerus ſenario auctus, ad numerum binario auctum. Si tres, vt numerus duodenario auctus, ad numerum quaternario auctum. Et ſic in infinitum.

Quinta regula, quæ paruo labore probabitur ad normam propoſit. 4. ex propoſit. 3. lib. 3. eſt. Cylindrum circumſcriptum cuilibet conoidi fore ad ipſum, vt numerus conoidis auctus duabus vicibus tot vnitatibus vna plus, quotus eſt numerus intermediarum, ad ipſum numerum. Et per conuerſionem rationis, fore ad ſui exceſſum ſupra ipſum, vt dictum antecedens ad exceſſum ſupra conſequens.

Sexta regula, quæ facilè deducetur ex propoſit. 5. & ex regula 2. eſt. Fore cylindrum circumſcriptum cuilibet conico ad ipſum, vt duplus numerus conici auctus tot vnitatibus vna plus, quotus eſt numerus intermediarum, ad has eaſdem vnitates. Et per conuerſionem rationis, fore ad annulum ex ſemiparabolis reuolutis circa latus baſi parallelum, vt idem antecedens ad duplum numerum.

Septima, & vltima regula eſt. Quòd centrum grauitatis cuiuslibet ex infinitis conoidibus ſic diuidit eius axim, vt pars ad verticem ſit ad reliquam, vt numerus quem ipſum occupat in ſua ſerie, auctus tot vnitatibus vna plus, quot ſunt mediæ per quas ſecatur ratio radicalis proportionis ſubduplæ proportionis conoidis, ad ipſum numerum. V. g. ſi conoides ſit ſeriei principalis, vt numerus binario auctus ad numerum. Quia ratio proportionis ſubduplæ ſeca-

Digitized by Google

tur per vnam mediam. Si conoides ſit ſeriei vnius intermediæ, vt numerus quaternario auctus ad numerum. Si conoides ſit ſeriei trium intermediarum, vt numerus octonario auctus ad numerum. Et ſic in infinitum.

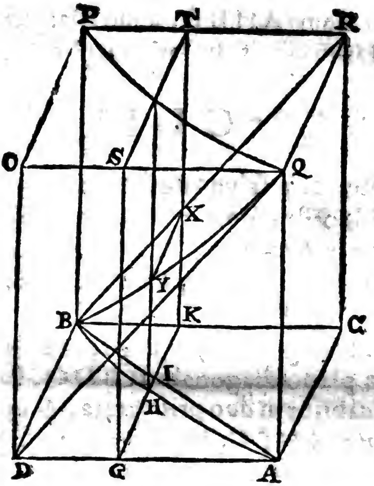
Verùm hic haud eſt ſiſtendum, ſed vlteriùs progrediendo, alias infinitè infinitas parabolas, infinitaue trilinea procreabimus, quorum omnium pariter oſtendemus menſuras, centra grauitatis, cæteraque ſymptomata hucuſque excogitata. Sed ante omnia recipiatur ſeques doctrina.

PROPOSITIO VII.

Sit AHBC, qualibet figura deficiens ad partes B, cuius diameter BC, baſis AC, rectangulum circumſcriptum DC, & ſint AIBC, CBMF, quæcunque figuræ pariter deficientes ad partes B, ſed eiuſdem ſpeciei, quarum diameter BC, & ducta GN, vbilibet parallela AF, ſit vt GK, ad KH, ſic MK, ad KL. Erit NK, ad KL, (ſi EC, ſit rectangulum figuræ CBMF, circumſcriptum) vt quadratum GK, ad rectangulum HKI.

PAtet, quia hæ proportiones componuntur ex ijſdem proportionibus. Nam Nk, ad kM, eſt vt GK, ad kI, propter figuras AIBC, CBMF, eiuſdem ſpeciei. Vt verò Gk, ad kH, ſic Mk, ad kL. Aſt proportio Nk, ad kL,

com-



componitur ex proportionibus NK, ad kM, & kM, ad kL. Et proportio quadrati GK, ad rectangulum HKI, componitur ex proportionibus Gk, ad kH, & Gk, ad kI. Quare patet propoſitum.

SCHOLIVM I.

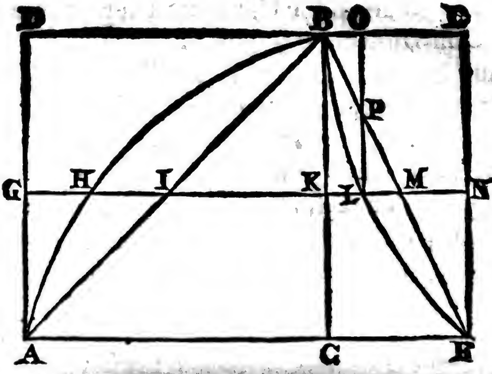
Si ergo intelligamus in DF, eſſe ductas infinitas GN, baſi AF, parallelas, & per omnia puncta L, tranſire curuam BLF, facilè patebit rectangulum

EC, fore ad figuram CBLF, vt parallelepipèdum cuius baſis DC, altitudo AC, ad ſolidum cuius vnum planum AHBC, aliud triangulum AIBC. Quod ſtatim magis, & clariùs explicabitur.

SCHOLIVM II.

Cogitemus in ſchemate ſequenti tàm ſuper figura AHBC, quàm ſuper rectangulo DC, extare cylindricos rectos PA, & PQRCAB, quorum altitudo RC, ſit æqualis AC, baſi figurarum AHBC, AIBC, (quam in præcedenti ſupponamus eſſe triangulum,) & cogitemus omnia hæc ſolida ſecta plano diagonali RBDQ. Parallelepipedum ſecabitur in duo priſmatata, & cylindricus ſuper figura AHBC, in duos truncos, quorum inferior erit RQBAC. Si ergo per Gk, intelligamus tranſire planum parallelum plano RA, hoc ſecabit tàm parallelepipedum, quàm truncum inferiorem cylindrici ſuper figura AHBC. Et planum Sk, in parallelepipedo erit quadratum ipſius Gk (quia æquale plano QC, quod propter æqualitatem rectarum RC, CA, eſt quadratum.) Planum verò HYXk, in trunco, erit rectangulum, quod fit ex HK, in kI, (quia kI, æqualis kX, cum triangula AIBC, CBR, ſint æqualia in omnibus, & per omnia.) Cum ergo in propoſitione, ſit probatum in ſchemate antecedenti, fore Nk, ad kL, vt quadratum GK, ad rectangulum HKI; (nempe vt

qua-



quadratum GT, ad rectangulum YK, in ſchemate præſenti:) facilè conſtabit fore rectangulum EC, ad figuram CBLF, vt parallelepipedum OC, ad ipſum truncum inferiorem RQBAC.

Quod ſi cogitemus AIBC, ſeù BFC, non fore triangulum, ſed quodlibet ex infinitis trilineis, vel quælibet figura, adeò vt BXRC, ſit trilineum, vel figura AIBC, æqualis, & intelligamus truncum inferiorem BXRCAQ, ſecari ſuperficie non recta vt prius, ſed curuata, vt truncus inferior ſit, vel pars trunci inferioris prioris, vel totum, reſpectu ipſius, ſecundum quod figura AIBC, eſt vel maior, vel minor triangulo: nihilominus conſtabit eſſe KX, æqualem kI; & rectangulum YK, æqua-

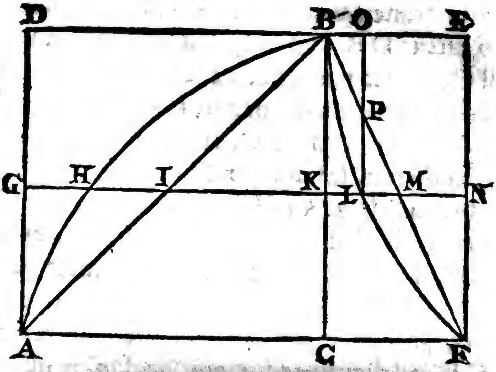
quale fore rectangulo HkI. Et eodem modo patebit fore, in ſchemate primo, rectangulum EC, ad figuram BLFC, vt parallelepipedum PA, ad dictum truncum inferiorem.

Amplius autem manifeſtè, nulloque negotio patebit ex noſtris doctrinis generalibus explicatis, eſſe figuram BLFC, dicti primi ſchematis, & truncos inferiores explicatos, magnitudines proportionaliter analogas. Vndè ſi aliquando reperiemus centra æquilibrij dictarum figurarum appenſarum ſecundum BC, habebimus etiam centra æquilibrij præfatorum truncorum ſecundum BC, appenſorum.

PROPOSITIO VIII.

Si ſint eadem, quæ in propoſitione anteced. & in primo ſuo ſchemate CBMF, ſit triangulum, & proportio MK, ad KL, ſit vtcumque ſubmultiplicata proportionis radicalis NK, ad KM, nempe ſit quælibet fractio illius. Erit rectangulum EC, ad trilineum BLFC, vt duplus numerus denominatoris dictæ fractionis vnitate auctus, ad ipſum numerum denominatoris.

PRopoſitio hæc indiget explicatione. Intelligimus autem ſic, quod ſi Mk, ad kL, ſit in ſubduplicata ratione Nk, ad kM, vt talis proportio ſit $\frac{1}{2}$. radicalis, rectangulum erit ad trilineum, vt 5. ad



ad 2. Si ſit in ſubtriplicata, nempe $\frac{1}{3}$. erit vt 7. ad 3. Si in ſubquadruplicata, nempe $\frac{1}{4}$. vt 9. ad 4. Et ſic in infinitum.

Exponatur namque ſemiparabola AHBC, cum triangulo AIBC, vt in propoſit. anteced. vt GK, ſit ad kH, vt Mk, ad kL. Nempe ſi proportio Mk, ad kL, ſit ſubduplicata radicalis, ſemiparabola ſit quadratica: ſi ſubtriplicata, cubica: ſi ſubquadruplicata, ſit quadratoquadratica: & tàm ſuper ipſa, quàm ſuper rectangulo DC, circumſcripto cogitemus cylindricos eos, quos ſupra explicauimus, & ſectos eodem modo. Iam conſtat ex dictis, eſſe rectangulum ad trilineum, vt parallelepipedum ad truncum inferiorem. Porrò ex doctrinis generali-

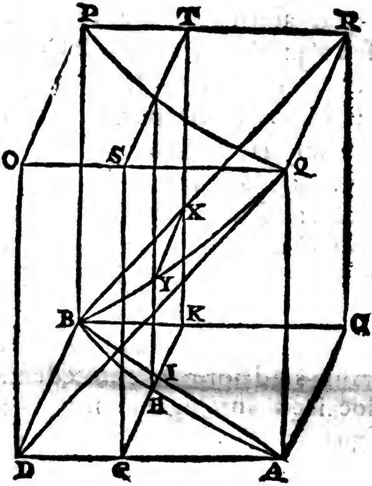
bus

bus aſſignatis in ſchol. 3. propoſit. 10. lib. 2. cum ſit vt priſma, quod eſt dimidium parallelepipedi PA, ad dictum truncum inferiorem, ſic cylindrus ex DC, rotato circa DB, ad ſolidum ex ſemiparabola AHBC, rotata pariter circa DB: erit vt parallelepipedum ad dictum truncum, ſeù vt rectangulum CE, ad trilineum BLFC, ſic duplus cylindrus ex DC, ad dictum ſolidum ex ſemiparabola. Sed ex propoſit. 14. lib. 2. & ex ſexta regula generali ſupra explicata, eſt cylindrus ex DC, ad ſolidum ex ſemiparabola, vt numerus auctus dimidia vnitate ad numerum; & duplus cylindrus, vt duplus numerus vnitate auctus ad numerum. Erit ergo etiam rectangulum CE, ad dictum trilineum, vt duplus numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum parabolæ. Sed numerus parabolæ in ſerie principalium idem eſt cum numero denominatoris fractæ proportionis Mk, ad KL. Quare patet propoſitum. Quod &c.

COROLLARIVM.

Ergo per conuerſionem rationis, erit rectangulum ad has infinitas ſemiparabolas BLFE, vt antecedens dictum, ad numerum denominatoris vnitate auctum. Nempe vt 5. ad 3. vt 7. ad 4. &c.

SCHO-



SCHOLIVM I.

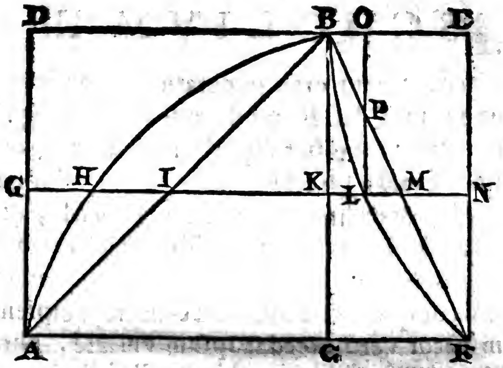
Habemus ergo duplicatam ſeriem infinitam, trilineorum, & parabolarum, & horum omnium habemus quadraturas dependenter à quadraturis principalium. Quia ex quadraturis ſemiparabolarum principalium AHBC, dependent rationes, quas habent cylindri ex DC, circa DB, ad annulos ex ijſdem ſemiparabolis rotatis circa eandem BD. Ex quibus in præſenti propoſit. deducimus quadratu-

ras tàm infinitorum trilineorum CBLF, quàm infinitarum ſemiparabolarum FLBE.

Habitis quadraturis, facilè erit aſſignare centra grauitatis ſeù æquilibrij in axibus BC, BE, dictarum figurarum. Nec non centra æquilibrij in baſibus EF, infinitarum ſemiparabolarum. Ex quibus, & ex ipſarum quadraturis, paruo labore, aſſequemur rationes cylindrorum ex BF, circa BE, ad infinita conoidea ex ſemiparabolis BLFE, circa BE. Pariter facilè erit aſſignare rationes cylindrorum ex BF, circa BC, ad annulos ex ijſdem ſemiparabolis reuolutis circa BC. Hæc enim omnia abſque ſudore determinabuntur in menſuris, & regulis generalibus ad normam antecedenter expoſitorum. Hoc idem intelligendum veniet quotieſcunque aſſignabimus quadraturas aliorum infinitorum trilineorum, vel infinitarum parabolarum. Quod cupimus animaduerti, ne idem, cum lectorum tædio, repetere cogamur.

SCHOLIVM II.

Habemus ergo quadraturas infinitorum trilineorum, in quibus ratio ordinatim applicatæ CF, vel NK, ad ordinatim applicatam KL, eſt in ſeſquialtera, in ſeſquitertia, in ſeſquiquarta, in ſeſquiquinta (& ſic in infinitum) ratione radicalis NK, ad kM. Cum enim ratio Mk, ad kL, ſit $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}$ &c. radicalis; ratio NK, ad KL, erit $\frac{3}{2}\ \frac{4}{3}\ \frac{5}{4}\ \frac{6}{5}$ eiuſdem radi-



radicalis NK, ad kM, vel CB, ad Bk. Et conſequenter ſi à punto L, ordinatim applicetur LO, ad diametrum in ſemiparabola BLFE: erit CB, ad Bk, hoc eſt ordinatim applicata FE, ad ordinatim applicatam LO, in ſubſeſquialtera, in ſubſeſquitertia, in ſubſeſquiquarta, &c. proportione EB, ad BO, ſeu FE, ad OP.

Si ergo ratio EB, ad BO, ſtatuatur tamquam radicalis, habebimus ſeriem infinitarum ſemiparabolarum FLBE, in quibus rationes ordinatim applicatarum EF, LO, &c. erunt ſubſeſquialteræ, ſubſeſquitertiæ, &c. rationum diametrorum EB, BO. Veluti prius in ſerie principalium erant tales

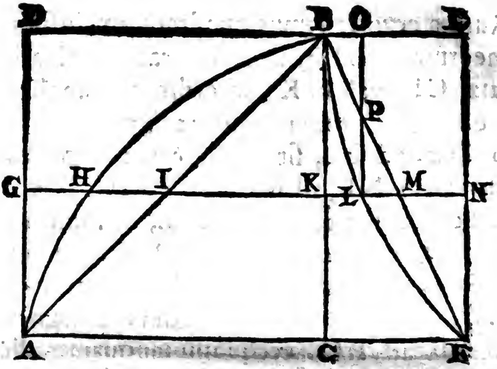
rationes ſubduplicatæ, ſubtriplicatæ, ſubquadruplicatæ, &c. earundem.

SCHOLIVM III.

Proſequamur ergo generationem infinitorum trilineorum CBLF, modis quos ſtatim explicabimus. Primuſque ſit talis. Concipiamus (vt etiam ſupra fecimus) rectangulum CE, triangulum BMFC, & ordinatim applicatam NMk, & ratio Mk, ad kN, ſit vteunque ſubmultiplicata rationis radicalis Nk, ad kM, ſed taliter, vt numerator fractionis ſit quilibet numerus à binario incipiens, denominator verò excedat ipſum vnitate. Nimirum ſit $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ &c. Sic procreabimus aliam ſeriem infinitorum trilineorum, quorum quadraturas pariter aſſignabimus.

Vt ergo quadraturæ CBLF, infinitorum trilineorum deducantur, ſit rectangulum DC, cum triangulo AIBC, & cum ſemiparabola AHBC, in quibus ordinatim applicatis GK, ſit Gk, ad KH, vt Mk, ad kL. Nimirum ſi ratio Mk, ad kL, ſit $\frac{2}{3}$ radicalis, etiam parabola AHBC, ſit ea, in qua ratio ordinatim applicatæ AC, ad ordinatim applicatam Hk, ſit ſubſeſquialtera rationis axis CB, ad Bk. Et ſic in alijs. Ad modum ſuperiorum conſtabit, fore vbique Nk, ad kL, vt quadratum Gk, ad rectangulum HkI. Et ſi ſuper DC, AHBC, concipiantur cylindrici recti PA, &c. ſecti vt ſupra

fa-



factum fuit. Nihilominus conſtabit fore rectangulum E C, ad trilineum C B L F, & vt parallelepipedum P A, ad truncum inferiorem cylindrici exiſtentis ſuper ſemiparabola; & vt duplus cylindrus ex D C, circa D B, ad annulum ex A H B C, circa eandem D B. Aſt quum ratio dicti cylindri, ad dictum annulum haberi poſſe faciliter, ſtatutum ſit ſupra in ſchol. 1. Conſequenter quadraturæ tàm infinitorum trilineorum C B L F, quàm infinitarum ſemiparabolarum F L B E, haud erunt occultæ. Nec non omnia indè conſequentia.

SCHO-

SCHOLIVM IV.

Rurſus ergo tenemus quadraturam infinitorum trilineorum CBLF, in quibus ratio ordinatim applicatæ CF, vel NK, ad ordinatim applicatam kL, eſt $\frac{5}{3}\ \frac{7}{4}\ \frac{9}{5}\ \frac{11}{6}$ &c. rationis radicalis. Cum enim ratio Mk, ad kL, ſit $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}$ &c. rationis radicalis, erit ratio NK, ad KL, eiuſdem radicalis $\frac{5}{3}\ \frac{7}{4}\ \frac{9}{5}\ \frac{11}{6}$ &c. Et conſequenter ſi à punto L, ordinatim applicetur LO, ad ſemidiametrum BE, in ſemiparabola FLBE, erit ratio FE, ad LO, rationis EB, ad BO, $\frac{3}{5}\ \frac{4}{7}\ \frac{5}{9}\ \frac{6}{11}$ & ſic in infinitum. Si ergo rurſum ratio EB, ad BO, accipiatur tanquam radicalis, tenebimus ſeriem infinitam ſemiparabolarum FLBE, in quibus rationes ordinatim applicatarum erunt $\frac{3}{5}\ \frac{4}{7}\ \frac{5}{9}\ \frac{6}{11}$ rationum axium.

SCHOLIVM V.

Proſequatur ergo geneſis infinitorum trilineorum ſic. Sint omnia, quæ ſupra, ſed ratio MK, ad KL, ſit fractio proportionis radicalis $\frac{3}{5}\ \frac{4}{7}\ \frac{5}{9}\ \frac{6}{11}$ &c. Sic denuò procreabimus aliam ſeriem infinitorum trilineorum CBLF. Horum quadraturas hauriemus ſi ſupponamus omnia, quæ ſupra, ſed ſemiparabola AHBC, ſit talis naturæ, vt ratio GK, ad KH, ſit rationis CB, ad BK, radicalis $\frac{3}{5}\ \frac{4}{7}\ \frac{5}{9}\ \frac{6}{11}$ &c. nimirum correſpondeat rationi MK, ad KL. Deinde

inſe-

Digitized by Google

inſequendo argumentationem veluti peregimus in ſchol. 3. obtinebimus intentum, mediantibus annulis ex infinitis ſemiparabolis AHBC, rotatis circa DB.

Habitis quadraturis trilineorum CBLF, tenebimus quadraturas infinitarum ſemiparabolarum BLFE, in quibus ratio ordinatim applicatarum erit aliqua ſeries infinita fractionis radicalis; pariterque tenebimus omnia inde conſequentia; præcipuè rationem cylindri ex BF, ad annulum ex ſemiparabola BLFE, rotata circa BC. Quare diſpoſita ſemiparabola BLFE, vt eſt AHBC, & proſequendo generationem trilineorum CBLF, in quibus rationes MK, ad kL, ſint fractiones radicalis correſpondentes fractionibus ordinatim applicatarum in ſemiparabola AHBC: in infinitum quadrabimus infinita trilinea, & infinitas parabolas, deducemuſque omnia ex ipſis quadraturis conſequentia.

Porrò alio adminiculo curanda eſt quadratura aliorum infinitorum trilineorum, &c. Pro quo ſit.

PROPOSITIO IX.

Sit CBMF, trilineum quodlibet, cum triangulo CBRF, & cum rectangulo EC, circumſcripto, huius diameter ſit CB, baſis CF; ſit pariter aliud rectangulum DC, cum triangulo AHBC; omnia ſint ſecta GN, parallela AF; & in MK, ſumatur quodlibet pun-

ctum

Digitized by Google

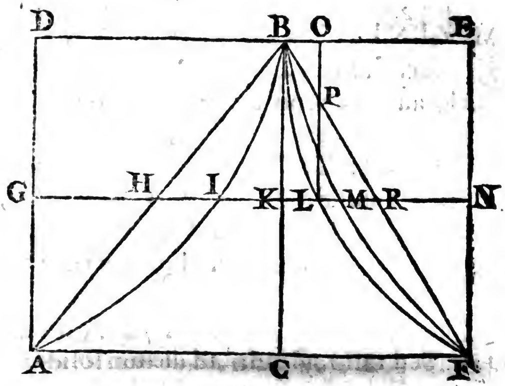
ctum L, & fiat vt RK, ad KL, ſic GK, ad KI. Erit Nk, ad kL, vt quadratum Gk, ad rectangulum Hkl.

PRopoſitio eſt facilis probatu. Quia hæ proportiones componuntur ex ijſdem proportionibus, vt clarè patet. Quapropter non demoramur.

SCHOLIVM I.

Si ergo intelligamus ductas fore infinitas GN, vt ſemper proportiones Mk, ad kL, ſint eædem partes proportionum RK, ad kM, & proportiones ſingulæ RK, ad KL, ſint æquales ſingulis proportionibus Gk, ad kI, & intelligamus per omnia puncta L, I, tranſire lineas BLF, AIB: facilè poterimus concludere, omnes lineas rectanguli EC, parallelas CF, fore ad omnes lineas trilinei CBLF, itidem parallelas CF, & rectangulum EC, ad trilineum CBLF, vt omnia quadrata DC, parallela, quadrato AC, ad omnia rectangula Hkl, planorum AHBC, AIBC, itidem parallela quadrato AC: & vt parallelepipedum cuius baſis DC, altitudo AC, ad ſolidum, cuius vnum planum trilineum AIBC, aliud triangulum AHBC.

Si ergo, vt factum fuit in ſchemate ſcholij 2. propoſit. 7. concipiamus tàm ſuper rectangulo DC, quàm ſuper trilineo AIBC, cylindricos rectos æque-



quealtos, quorum altitudo CA, ſectos vt ibidem factum fuit. Concludemus nihilominus fore vt EC, ad trilineum CBLF, ſic parallelepipedum ſuper DC, ad truncum inferiorem cylindrici ſuper AIBC, cuius planum erectum ſuper ipſo, quorum communis ſectio BC, erit triangulum AHBC. Nempe vt duplus cylindrus ex DC, circa DB, ad ſolidum ex trilineo AIBC, reuoluto circa DB.

SCHOLIVM II.

Propiùs ergo ad rem accedentes, ſupponamus CBMF, eſſe trilineum quadraticum, & rationem

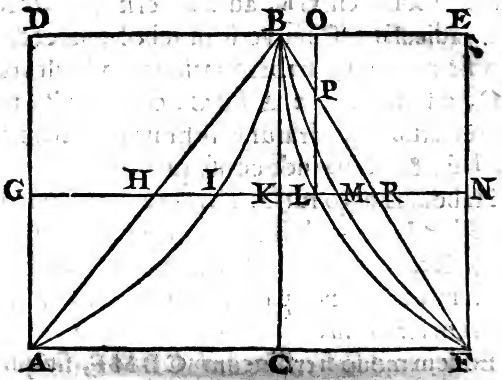
Digitized by Google

MK, ad kL, eſſe quamlibet fractionem radicalis, cuius numerator vnitas, nempe $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$ &c. ergo ratio Rk, ad kL, erit $\frac{3}{2}\ \frac{4}{3}\ \frac{5}{4}$ &c. rationis radicalis Rk, ad kM, vel Nk, ad KR. Et ratio Nk, ad kL, erit $\frac{5}{2}\ \frac{7}{3}\ \frac{9}{4}$ &c. eiuſdem radicalis Nk, ad kR. Pariter ratio Gk, ad kI, vtpotè æqualis rationi Rk, ad kL, erit $\frac{3}{2}\ \frac{4}{3}\ \frac{5}{4}$ &c. rationis radicalis GK, ad kH, vel NK, ad KR. Trilinea ergo CBLF, AIBC, ſunt diuerſæ naturæ. Nam ratio CF, ad kL, eſt $\frac{5}{2}\ \frac{7}{3}\ \frac{9}{4}$ &c. radicalis. Ratio verò AC, ad Ik, eſt $\frac{3}{2}\ \frac{4}{3}\ \frac{5}{4}$ &c. eiuſdem radicalis. Et quadraturas trilineorum CBLF, tenebimus ex proportione dupli cylindri ex DC, ad ſolidum ex trilineo AIBC, rotato circa DB. Sed ratio cylindri ad dictum ſolidum poſſe haberi traditum fuit ſupra in ſchol. 1. propoſit. 7. Ergo habebimus etiam quadraturas tàm infinitorum trilineorum CBLF, quàm infinitarum ſemiparabolarum BLFE, cum omnibus indè dependentibus.

SCHOLIVM III.

Habemus ergo rurſum alias infinitas ſemiparabolas FLBE, in quibus ratio FE, ordinatim applicatæ, ad ordinatim applicatam LO, eſt $\frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{4}{9}$ &c. rationis EB, ad BO, ſeù FE, ad PO. Quæ ratio ſi ſumatur tamquam radicalis, & continuentur inuentiones trilineorum, quorum menſuris inſeruiant annuli ex ſemiparabolis BLFE, reuolutis circa

BC,



BC, vt factum, & explicatum fuit in ſcholijs propoſit. anteced. præcipuè in 5. tenebimus aliàs infinitè infinitas ſeries trilineorum, & parabolarum, quarum rationes ordinatim applicatarum erunt fractiones rationis radicalis, quorum numeratores erunt diuerſi à iam traditis. Omnium etiam harum figurarum tenebimus omnia ſymptomata expoſita de infinitis parabolis principalibus.

SCHOLIVM IV.

Pariter trilineum CBMF, ſit trilineum cubicum, & pariter ſit ratio MK, ad kL, quælibet

fractio radicalis, cuius numerator vnitas. Ratio Nk, ad kL, erit $\frac{7}{2}$ $\frac{10}{3}$ $\frac{13}{4}$ &c. radicalis. Et ratio RK, ad kL, ſeù GK, ad kL, erit $\frac{5}{2}$ $\frac{7}{3}$ $\frac{9}{4}$ &c. eiuſdem radicalis. Cum verò in ſchol. anteced. traditum ſit nos poſſe habere rationes cylindrorum ex DC, ad annulos ex AIBC, circa DB, traditæ pariter erunt quadraturæ infinitorum trilineorum CBLF, & omnia inde conſequentia.

Habemus ergo rurſus aliàs infinitas ſemiparabolas FLBE, in quibus rationes FE, ad LO, erunt $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{13}$ $\frac{4}{13}$ &c. radicalium. Quæ parabolæ diſpoſitæ ſecundum explicata, parient menſuras infinitè infinitarum ſerierum.

Eodem modò ſi trilineum CBMF, ſit quadrato quadraticum, quadrato cubicum, &c. inueniemus mediantibus trilineis AIBC, ordinis inferioris, menſuras omnium trilineorum CBLF.

SCHOLIVM V.

Vniuerſaliter ergo poſſumus ſtatuere, annulum ex trilineo AIBC, reuoluto circa DB, inſeruire menſuræ trilinei CBLF, in quo ratio ordinatim applicatæ CF, ad kL, ſit eadem cum proportione compoſita ex ratione AC, ad HK, radicalem, & ex ratione eiuſdem AC, ad kI. Vel poſſumus ſtatuere, annulum dictum trilinei AIBC, parere menſuram illius trilinei CBLF, in quo ratio CF, ad

ad ^{k}L, excedat rationem AC, ad I^k, ratione radicali.

Iſtis artificijs putamus nos poſſe obtinère quadraturas omnium illarum parabolarum, in quibus rationes ordinatim applicatarum erunt fractiones quælibet proportionum axium correſpondentium, cum omnibus ex quadraturis dependentibus. Præcipuè cum omnibus centris grauitatis tàm ipſarum, quàm infinitorum trilineorum.

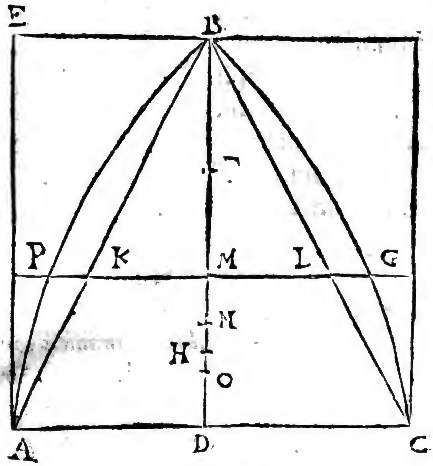
PROPOSITIO X.

Cylindrus circumſcriptus cuilibet ex infinitis conoidibus, vel conicis eſt ad ipſum, vt rectangulum circumſcriptum, vel parabolæ, vel trilineo cuius ratio ordinatim applicatarum ſit dupla rationis ordinatim applicatarum in conoide, vel conico.

ESto APBC, in ſequenti ſchemate. Quodlibet ex infinitis conoidibus parabolicis, vel conicis cum cylindro EC, circumſcripto, & eſto A^{k}BD, quælibet vel ſemiparabola, vel trilineum, vt in ipſis ordinatim applicatis quibuslibet QM, ratio QM, ad M^k, ſit duplicata rationis QM, ad MP. Dico fore cylindrum ad conoides, vel conicum, vt rectangulum ad trilineum, vel ſemiparabolam. Res eſt luce clarior. Quia cum ratio QM, ad M^k, ſit duplicata rationis QM, ad MP, erit QM, ad M^k, vt quadra-

dra-

Digitized by Google



dratum QM, ad quadratum MP: ſeù vt circulus radij QM, ad circulum radij MP. Et hoc vbilibet. Ergo & cylindrus ad ſolidum, vt rectangulum ad ſemiparabolam, vel trilineum. Quod &c.

SCHOLIVM.

Ex his patet qualiter menſuræ conoideorum, vel conicorum inſeruiant menſuris ſemiparabolarum, & trilineorum, & viciſſim. Si ergo habebimus, ex ſupra explicatis, menſuras conoideorum, vel conicorum,

rum, hæ inſeruient menſuris trilineorum, & ſemiparabolarum, & è contra.

Inſuper patet dicta conoidea, & conicos fore proportionaliter analogos cum præfatis ſemiparabolis, vel trilineis. Cum verò, ex dictis ſuperiùs, pateant centra grauitatis omnium planorum; non erunt abſcondita centra grauitatis omnium ſolidorum.

Digitized by Google

PROPOSITIO EORVM, QVÆ A THOMA HOBBES

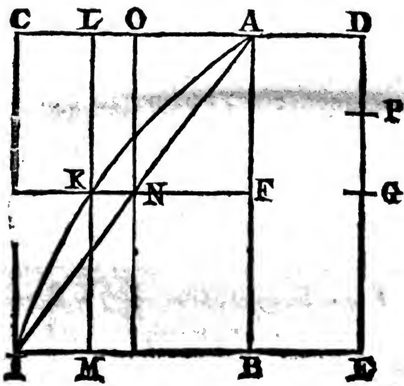
Malmesburienſi pertractata circa præſens ſubiectum, non benè percipimus.

HVeuſque ea omnia verbis expreſſimus, quæ meditati ſumus circa infinitarum parabolarum materiam. Remanet aliqua patefacere, quæ circa idem ſubiectum à Clariſſimo, nec vnquam ſatis laudato *Thoma Hobbes Malmesburienſi*, haud rectè percipimus. Vir hic egregius incipit de his tractationem *in cap. 16. ſect. 1. Philoſoph. de corpore*, in quo capite peragit. *De motu accelerato, & Vniformi, & de motu per concurſum*. Ibique *in numero quarto* proponit ſequentem auream regulam, quam vtique veriſſimam cenſemus, ſed probationem non bene percipimus.

In motu (inquit ipſe) *à quiete ita accelerato vt impetus continuò creſcant in ratione temporum conſumptorum duplicata; erit quoque longitudo percurſa vno tempore ad longitudinem alio tempore percurſam, vt factum ex impetu in tempus vnius motus, ad factum ex impetu in tempus alterius motus*. Huiuſque aureæ regulæ explicationem ſubiungit in Schemate.

Digitized by Google

Sit enim (verba ipſius) *in fig.* 2. *tempus AB, in cuius temporis initio A, impetus ſit vt ipſum punctum A, ſed procedente tempore creſcat impetus continuò in ratione temporum duplicata donec in vltimo puncto temporis B acquiſitus ſit impetus BI, & in AB tempore, ſumpto vbicunque puncto F, ordinatim applicetur impetus eo tempore acquiſitus FK.* Poſt hæc incipit probationem ſic. *Quoniam ergo FK ad BI ſupponitur habere rationem duplicatam eius quam habet AF ad AB, habebit AF ad AB rationem ſubduplicatam eius quam habet FK, ad BI,* (egregiè me Hercle,) *& AB, ad AF duplicatam eius quam habet BI ad FK.* Hæc poſtrema verba ingenuè fatemur à nobis nequaquam



H per-

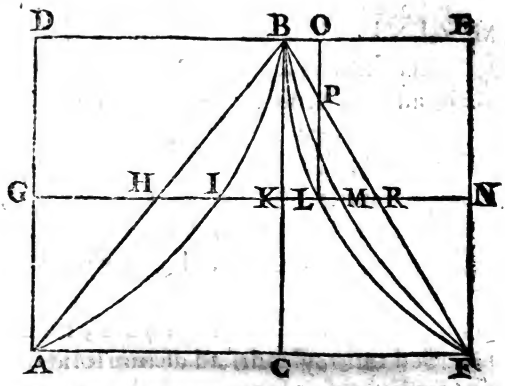
ctum L, & fiat vt RK, ad KL, ſic GK, ad KI. Erit Nk, ad kL, vt quadratum Gk, ad rectangulum Hkl.

PRopoſitio eſt facilis probatu. Quia hæ proportiones componuntur ex ijſdem proportionibus, vt clarè patet. Quapropter non demoramur.

SCHOLIVM I.

Si ergo intelligamus ductas fore infinitas GN, vt ſemper proportiones Mk, ad kL, ſint eædem partes proportionum RK, ad kM, & proportiones ſingulæ RK, ad KL, ſint æquales ſingulis proportionibus Gk, ad kI, & intelligamus per omnia puncta L, I, tranſire lineas BLF, AIB: facilè poterimus concludere, omnes lineas rectanguli EC, parallelas CF, fore ad omnes lineas trilinei CBLF, itidem parallelas CF, & rectangulum EC, ad trilineum CBLF, vt omnia quadrata DC, parallela, quadrato AC, ad omnia rectangula HkI, planorum AHBC, AIBC, itidem parallela quadrato AC: & vt parallelepipedum cuius baſis DC, altitudo AC, ad ſolidum, cuius vnum planum trilineum AIBC, aliud triangulum AHBC.

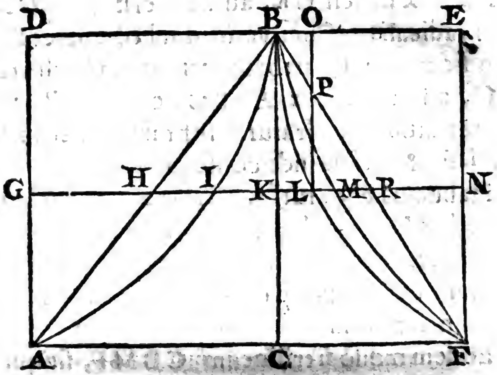
Si ergo, vt factum fuit in ſchemate ſcholij 2. propoſit. 7. concipiamus tàm ſuper rectangulo DC, quàm ſuper trilineo AIBC, cylindricos rectos æque-



quealtos, quorum altitudo CA, ſectos vt ibidem factum fuit. Concludemus nihilominus fore vt EC, ad trilineum CBLF, ſic parallelepipedum ſuper DC, ad truncum inferiorem cylindrici ſuper AIBC, cuius planum erectum ſuper ipſo, quorum communis ſectio BC, erit triangulum AHBC. Nempe vt duplus cylindrus ex DC, circa DB, ad ſolidum ex trilineo AIBC, reuoluto circa DB.

SCHOLIVM II.

Propiùs ergo ad rem accedentes, ſupponamus CBMF, eſſe trilineum quadraticum, & rationem



BC, vt factum, & explicatum fuit in ſcholijs propoſit. anteced. præcipuè in 5. tenebimus aliàs infinitè infinitas ſeries trilineorum, & parabolarum, quarum rationes ordinatim applicatarum erunt fractiones rationis radicalis, quorum numeratores erunt diuerſi à iam traditis. Omnium etiam harum figurarum tenebimus omnia ſymptomata expoſita de infinitis parabolis principalibus.

SCHOLIVM IV.

Pariter trilineum CBMF, ſit trilineum cubicum, & pariter ſit ratio MK, ad kL, quælibet

Digitized by Google

fractio radicalis, cuius numerator vnitas. Ratio Nk, ad kL, erit $\frac{7}{2}\ \frac{10}{3}\ \frac{13}{4}$ &c. radicalis. Et ratio RK, ad kL, ſeù GK, ad kL, erit $\frac{5}{2}\ \frac{7}{3}\ \frac{9}{4}$ &c. eiuſdem radicalis. Cum verò in ſchol. anteced. traditum ſit nos poſſe habere rationes cylindrorum ex DC, ad annulos ex AIBC, circa DB, traditæ pariter erunt quadraturæ infinitorum trilineorum CBLF, & omnia inde conſequentia.

Habemus ergo rurſus aliàs infinitas ſemiparabolas FLBE, in quibus rationes FE, ad LO, erunt $\frac{2}{7}\ \frac{3}{13}\ \frac{4}{19}$ &c. radicalium. Quæ parabolæ diſpoſitæ ſecundum explicata, parient menſuras infinitè infinitarum ſerierum.

Eodem modò ſi trilineum CBMF, ſit quadrato quadraticum, quadrato cubicum, &c. inueniemus mediantibus trilineis AIBC, ordinis inferioris, menſuras omnium trilineorum CBLF.

SCHOLIVM V.

Vniuerſaliter ergo poſſumus ſtatuere, annulum ex trilineo AIBC, reuoluto circa DB, inſeruire menſuræ trilinei CBLF, in quo ratio ordinatim applicatæ CF, ad kL, ſit eadem cum proportione compoſita ex ratione AC, ad HK, radicalem, & ex ratione eiuſdem AC, ad kI. Vel poſſumus ſtatuere, annulum dictum trilinei AIBC, parere menſuram illius trilinei CBLF, in quo ratio CF,

ad

ad ${}^{k}L$, excedat rationem AC, ad I^{k}, ratione radicali.

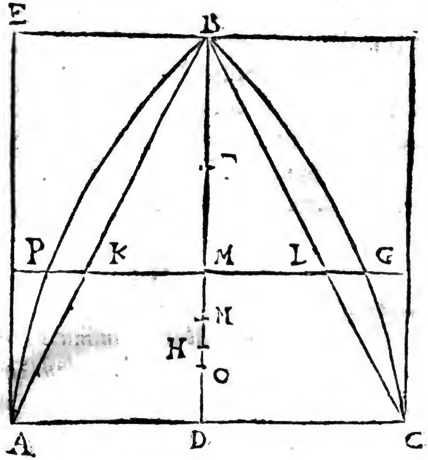
Iſtis artificijs putamus nos poſſe obtinère quadraturas omnium illarum parabolarum, in quibus rationes ordinatim applicatarum erunt fractiones quælibet proportionum axium correſpondentium, cum omnibus ex quadraturis dependentibus. Præcipuè cum omnibus centris grauitatis tàm ipſarum, quàm infinitorum trilineorum.

PROPOSITIO X.

Cylindrus circumſcriptus cuilibet ex infinitis conoidibus, vel conicis eſt ad ipſum, vt rectangulum circumſcriptum, vel parabolæ, vel trilineo cuius ratio ordinatim applicatarum ſit dupla rationis ordinatim applicatarum in conoide, vel conico.

ESto APBC, in ſequenti ſchemate. Quodlibet ex infinitis conoidibus parabolicis, vel conicis cum cylindro EC, circumſcripto, & eſto $A^{k}BD$, quælibet vel ſemiparabola, vel trilineum, vt in ipſis ordinatim applicatis quibuslibet QM, ratio QM, ad M^{k}, ſit duplicata rationis QM, ad MP. Dico fore cylindrum ad conoides, vel conicum, vt rectangulum ad trilineum, vel ſemiparabolam. Res eſt luce clarior. Quia cum ratio QM, ad M^{k}, ſit duplicata rationis QM, ad MP, erit QM, ad M^{k}, vt qua-

dra-



dratum QM, ad quadratum MP: ſeù vt circulus radij QM, ad circulum radij MP. Et hoc vbilibet. Ergo & cylindrus ad ſolidum, vt rectangulum ad ſemiparabolam, vel trilineum. Quod &c.

SCHOLIVM.

Ex his patet qualiter menſuræ conoideorum, vel conicorum inſeruiant menſuris ſemiparabolarum, & trilineorum, & viciſſim. Si ergo habebimus, ex ſupra explicatis, menſuras conoideorum, vel conico-

rum,

rum, hæ inſeruient menſuris trilineorum, & ſemiparabolarum, & è contra.

Inſuper patet dicta conoidea, & conicos fore proportionaliter analogos cum præfatis ſemiparabolis, vel trilineis. Cum verò, ex dictis ſuperiùs, pateant centra grauitatis omnium planorum; non erunt abſcondita centra grauitatis omnium ſolidorum.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO EORVM, QVÆ A THOMA HOBBES

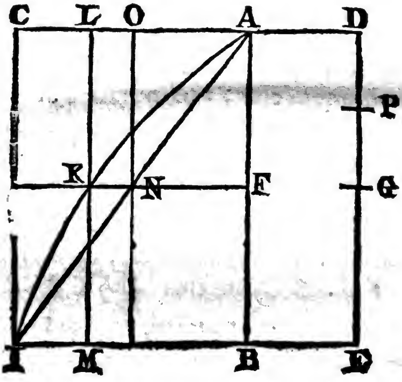
Malmesburienſi pertractata circa præſens ſubiectum, non benè percipimus.

HVeuſque ea omnia verbis expreſſimus, quæ meditati ſumus circa infinitarum parabolarum materiam. Remanet aliqua pateface-re, quæ circa idem ſubiectum à Clariſſimo, nec vnquam ſatis laudato *Thoma Hobbes Malmesburienſi*, haud rectè percipimus. Vir hic egregius incipit de his tractationem *in cap. 16. ſect. 1. Philoſoph. de corpore*, in quo capite peragit. *De motu accelerato, & Vniformi, & de motu per concurſum.* Ibique *in numero quarto* proponit ſequentem auream regulam, quam vtique veriſſimam cenſemus, ſed probationem non bene percipimus.

In motu (inquit ipſe) *à quiete ita accelerato vt impetus continuò creſcant in ratione temporum conſumptorum duplicata; erit quoque longitudo percurſa vno tempore ad longitudinem alio tempore percurſam, vt factum ex impetu in tempus vnius motus, ad factum ex impetu in tempus alterius motus.* Huiuſque aureæ regulæ explicationem ſubiungit in Schemate.

Sit

Sit enim (verba ipſius) *in fig. 2. tempus AB, in cuius temporis initio A, impetus ſit vt ipſum punctum A, ſed procedente tempore creſcat impetus continuò in ratione temporum duplicata donec in vltimo puncto temporis B acquiſitus ſit impetus BI, & in AB tempore, ſumpto vbicunque puncto F, ordinatim applicetur impetus eo tempore acquiſitus FK.* Poſt hæc incipit probationem ſic. *Quoniam ergo FK ad BI ſupponitur habere rationem duplicatam eius quam habet AF ad AB, habebit AF ad AB rationem ſubduplicatam eius quam habet FK, ad BI,* (egregiè me Hercle,) *& AB, ad AF duplicatam eius quam habet BI ad FK.* Hæc poſtrema verba ingenuè fatemur à nobis nequaquam



H per-

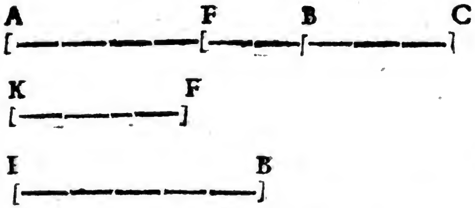
percipi. Immò pro certo habemus, (dummodò hæc vera ſint) nos nunquam definitiones Quinti Libri Euclidis elementorum rectè percepiſſe. Inquit Euclides in loco citato def. 5.

Quandò tres magnitudines proportionales ſint, prima ad tertiam, duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet ſecundam. Ex hac Definitione probamus Propoſitionem ſequentem.

PROPOSITIO XI.

Habeat AF, ad AB, ſubduplicatam rationem eius, quam habet KF, ad IB. Dico etiam conuertendo, habere BA, ad AF, ſubduplicatam rationem IB, ad KF.

Fiat vt AF, ad AB, ita AB, ad AC. Ergo (ex citat. Euclidi def.) AF, ad AC, habebit duplicatam rationem eius, quam habet ad AB. Et AF, ad AB, habebit ſubduplicatam rationem eius, quam habet ad AC. Sed ex hypotheſi, habet etiam AF, ad AB, ſubduplicatam rationem eius, quam habet kF, ad IB. Quare vt AF, ad AC, ſic kF, ad IB. Et conuertendo, vt CA, ad AF, ſic IB, ad KF. Sed cum tres CA, BA, AF, ſint continuè proportionales (ex dicta Euclid. Def.) habet CA, ad AF, duplicatam rationem eius, quam habet CA, ad AB; ſeù BA, ad AF. Et conſequenter BA, ad AF, habet ſubduplicatam rationem



nem eius, quam habet C A, ad A F. Quare etiam B A, ad A F, habebit rationem ſubduplicatam eius, quam habet I B, ad k F. Quod erat probandum.

Neſcimus ergo percipere quomodò geometricè diſcurrat doctiſſimus Hobbes (reaſumatur ſuperius ſchema) dum ait. *Quoniam ergo FK ad BI ſupponitur habere rationem duplicatam eius quam habet AF ad AB, habebit AF ad AB rationem ſubduplicatam eius quam habet FK ad BI,* (egregiè vt ſupra diximus,) *&* (conuertendo) *AB ad AF duplicatam eius quam habet BI ad FK.* Contra propoſitionem antecedentem, cui doctrinæ haud ſubſcribimus.

Sequitur Hobbes diſcurſus. *Et proinde erit punctum K in linea Parabolica cuius diameter eſt AB, & baſis BI.* Vtiquè punctum K, eſt in linea parabolica, ſed non cuius diameter A B, baſis I B, vt ipſe putat, ſed cuius diameter eſt C A, æqualis I B, baſis C I, æqualis A B, vt infra conabimur probare.

Sed quod dicit de reliquis punctis, quæ ſint in parabola, vera ſunt, ſed non exiſtimamus in ea, quam

ipſe deſcripſit. Sicuti non exiſtimamus verum eſſe, quod affirmat dicens. *Quare impetus ductus in totum tempus AB erit parabola AKIB, quæ æqualis eſt parallelogrammo AM cuius vnum quidem latus eſt AB tempus, alterum autem impetus AL, duæ tertiæ impetus BI.* Non enim impetus ductus in tempus conſtituit parabolam, ſed trilineum parabolicum quadraticum, cuius vnum quidem latus eſt AB, tempus, alterum autem impetus AL, vna tertia impetus BI. Reliqua vſque ad corollarium primum, ſunt eiuſdem farinæ, cum rectè deducerentur, quandò non commiſſus fuiſſet minimus error (vt putamus) in principio.

Aſt corollarium primum, quamuis tanquam verum à nobis agnoſcatur, attamen probatur modo, qui multum diſplicet. Cum data eiuſdem veritate ſubſequatur falſitas noſtræ propoſit. 3. lib. 1. De infinitis Parabolis. Corollarium tale eſt. *Longitudines percurſæ motu ita accelerato vt impetus continuo creſcant in ratione temporum duplicata, ſunt in ratione ſuorum temporum triplicata.* Quod vtique verum eſt. Probatio talis eſt. *Nam vt longitudo DE ad DP, ita eſt parallelogrammum AM ad parallelogrammum AN,* (admittimus) *& ita parabola ABIK, ad parabolam AFK.* Transeat. *Sed parabola ABIK eſt ad parabolam AFK, in ratione triplicata eius rationis quam habet AB tempus ad AF tempus, &c.* Non percipimus. Nam vel hæc, vel noſtra citata propoſitio falſa eſt. Propoſitio noſtra gene-

ralis

ralis talis eſt. *Si qualibet ex infinitis ſemiparabolis ſecetur linea baſi parallela. Erit ſemiparabola tota ad ſemiparabolam aduerticem, vt poteſtas baſis ſemiparabolæ vno gradu altior poteſtate parabolæ ad ſimilem poteſtatem baſis ſemiparabolæ aduerticem.* Ex qua regula, in caſu noſtro, ſemiparabola AkIB, eſt ad ſemiparabolam kAF, in triplicata ratione baſis IB, ad baſim kF, non axis BA, ad axim AF.

Secundum corollarium verum vtique eſt, aſt non putamus ex vi ſui diſcurſus, ſed ex eo, quem infra proponemus.

Tertium corollarium putamus falſum. Non enim credimus eſſe longitudinem ad longitudinem, vt parabola ad parallelogrammum, ſeù vt 2. ad 3. ſed vt trilineum ad parallelogrammum, nempe vt 1. ad 3.

Quartum corollarium cenſemus falſiſſimum: non enim inuenitur, vt ipſe ait. *Vbi impetus creſcunt in ratione temporum triplicata, totam velocitatem deſignari per parabolaſtrum primum* (nempe per parabolam cubicam,) ſed per trilineum cubicum, *& vbi impetus creſcunt in ratione temporum quadruplicata, totam velocitatem deſignari per parabolaſtrum ſecundum* (ſeù quadratoquadraticum,) ſed per tale trilineum.

Sed iuxta noſtrum modum tradatur eadem regula, probeturque, & iuxta mentem noſtram deducantur corollaria.

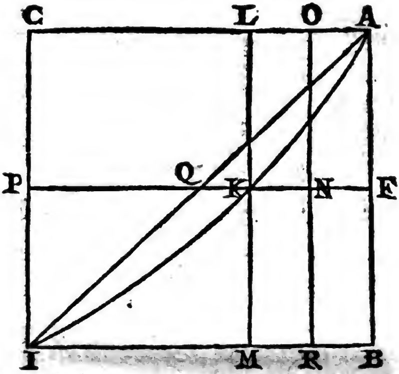
PRO-

PROPOSITIO XII.

In motu à quiete ita accelerato, vt impetus continuò creſcant in ratione temporum conſumptorum duplicata; erit quoque longitudo percurſa vno tempore ad longitudinem alio tempore percurſam, vt factum ex impetu in tempus vnius motus, ad factum ex impetu in tempus alterius motus.

SIt enim tempus AB, in cuius temporis initio A, impetus ſit vt ipſum punctum A, ſed procedente tempore creſcat impetus continuò in ratione temporum duplicata, donec in vltimo puncto temporis B, acquiſitus ſit impetus BI; & in AB, tempore, ſumpto vbicunque puncto F, ordinatim applicetur impetus eo tempore acquiſitus Fk. Quoniam ergo IB, ad kF, eſt in ratione duplicata BA, ad AF; nempe eſt vt quadratum BA, ad quadratum AF, erit punctum K, in linea parabolica, cuius axis CA, baſis IC. (Si enim hæc intelligatur tranſire per K, & duci KL, parallelam IC, eſt per hypotheſim, IB, ſeu CA, ad kF, ſeu LA, vt quadratum BA, ſeu CI, ad quadratum AF, ſeu Lk.) Et ſimili ratione in quocunque puncto temporis AB, applicetur impetus eo tempore acquiſitus, erit recta eum impetum deſignans in eadem parabolica AkI. Quare impetus ductus in totum tempus AB, erit trilineum AkIB, quod

æqua-



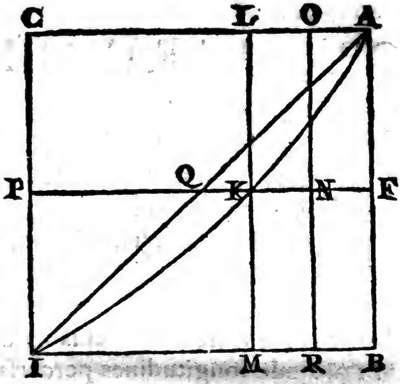
æquale eſt parallelogrammo AM, cuius vnum qui-dem latus eſt A B, tempus, alterum autem impetus A L, vna tertia impetus B I. (Eſt enim omne tale trilineum æquale trienti parallelogrammi altitudinem, & baſim habentis eandem.) Tota ergo velocitas per A B, vt quæ fit ab impetu A L, in tempus A B, eſt parallelogrammum A M. Similiter ſi ſumatur F N, quæ ſit $\frac{1}{3}$ impetus F k, compleaturque parallelogrammum F O, erit F O, tota velocitas per tempus A F, vt quæ fit ab impetu A O, ſiuè F N, iniformi ducto in tempus A F. Sit autem longitudo percurſa tempore A B, velocitate A M, recta D E. Poſtremò ſupponatur longitudo

per-

percurſa tempore AF, velocitate AN, eſſe DP. Dico eſſe vt AM, ad AN, ſiue vt trilineum AKIB, ad trilineum AFk, ita DE, ad DP. Fiat vt AM, ad FL, (hoc eſt vt AB, ad AF,) ita DE, ad DG. Iam ratio AM, ad AN, componitur ex rationibus AM, ad FL, & FL, ad AN. Sed vt AM, ad FL, ita eſt per conſtructionem, DE, ad DG. Et vt FL, ad AN, *(* quia tempus vtrobique idem eſt nempe AF,) ita longitudo per DG, ad longitudinem DP, (nam eodem tempore longitudines percurſæ ſunt vt velocitates.*)* Quare ex æquo, vt AM, ad AN, nempe vt trilineum AKIB, ad trilineum AkF: nempe vt rectangulum CB, factum ex impetu IB, in tempus ſuum AB, ad rectangulum FL, factum ex impetu kF, in tempus ſuum AF, ita ED, ad DP. Quod erat probandum.

COROLLARIVM I.

Longitudines percurſæ motu ita accelerato, vt impetus continuò creſcant in ratione temporum duplicata, ſunt in ratione ſuorum temporum triplicata. Nam vt longitudo DE, ad DP, ita eſt trilineum AkIB, ad trilineum AkF. Aſt vniuerſaliter ex ſchol. 1. citat. noſtræ propoſit. eſt trilineum ad trilineum, vt poteſtas BA, vno gradu altior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem AF; nempe in caſu noſtro, vt cubus BA, ad cubum AF; nempe



pe in triplicata ratione BA, ad AF. Quare etiam ratio ED, ad DP, erit triplicata rationis BA, ad AF.

COROLLARIVM II.

Longitudines percurſæ æqualibus temporibus deinceps ab initio ſumptis in motu ita accelerato, vt impetus ſint in duplicata ratione temporum (ſiue in motu bis accelerato) ſunt vt differentiæ numerorum cuborum incipientium ab vnitate, hoc eſt vt 7. 19. 36. &c. Nam ſi primo tempore longitudo ponatur 1. in fine ſecundi temporis erit longitudo 8. In fine

tertij 27. In fine quarti 64. &c. Qui ſunt numeri cubici, quorum differentiæ ſunt 7. 19. 36. &c.

COROLLARIVM III.

In motu vniformiter accelerato, longitudo quælibet percurſa, eſt ad longitudinem eodem quidem tempore percurſam, ſed impetu vbique quantus eſt vltimò acquiſitus, vt trilineum ad parallelogrammum eiuſdem altitudinis, & baſis. Scilicet, vt 1. ad 3. Nam trilineum AkIB, eſt impetus creſcens ductus in AB, tempus: & parallelogrammum AI, eſt impetus maximus, & vniformis ductus in idem tempus AB. Et proinde longitudines percurſæ, erunt vt trilineum ad parallelogrammum, hoc eſt vt 1. ad 3.

Si vellemus cæteros motus proſequi vbi impetus creſcunt in ratione temporum triplicata, quadruplicata, quintuplicata, &c. exiret labor in infinitum non neceſſarius. Nam qua Methodo longitudines percurſas impetu ſimpliciter, & dupliciter creſcente computauimus, poterit quis eadem Methodo longitudines percurſas impetu creſcente tripliciter, quadrupliciter, & quotupliciter velit computare.

Inueniet autem, vbi impetus creſcunt in ratione temporum triplicata, totam velocitatem deſignari per trilineum cubicum, & longitudines percurſas eſſe in ratione temporum quadruplicata. Et vbi impetus creſcunt in ratione temporum quadruplicata, totam velocitatem deſignari per trili-

trilineum quadrato quadraticum, & longitudines eſſe in ratione temporum quintuplicata, & ſic in infinitum.

Et hæc quidem quantum ad præfatum numerum quartum. Succedunt in eodem cap. alia, quæ erudi- tiſſimè determinat. Aſt in cap. 17. vbi peragit *De Figuris Deficientibus*, pauciſſimis verbis concinnat elegantiſſimam, vniuerſaliſſimamque regulam, quæ vtique concordat cum ijs omnibus, quas nos ſupra tradidimus. Niciturque ipſam ſtabilire aliqua certa, vniformi, ſibique perpetuò conſtate probatione, & non verbosè per longas ambages, & medijs diuerſis, vt nos fecimus. Regula autem talis eſt, tradita in numero 2.

Figura deficiens facta à quantitate continuò decreſcente donec euaneſcat, ſecundum rationes vbique proportionales & commenſurabiles, eſt ad complementum ſuum, vt ratio totius altitudinis, ad altitudinem quolibet tempore diminutam, ad rationem quantitatis integræ quæ figuram deſcribit, ad eandem tempore eodem diminutam.

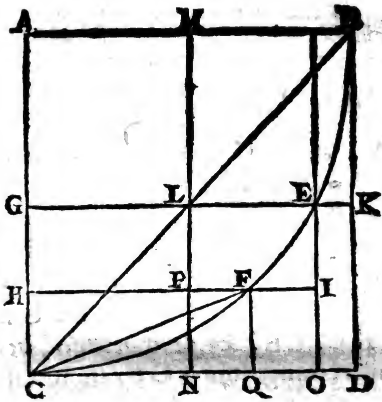
Sit quantitas A B (in figura prima) quæ mota per altitudinem A C deſcribat figuram A D completam; eadem verò decreſcens donec in puncto C tota euaneſcat deſcribat figuram deficientem A B E F C, cuius complementum erit figura B D C F E, intelligaturque motum eſſe A B donec iaceat in G K, vt altitudo diminuta ſit G C; atque A B diminuta, ſit G E, ſitque ratio A C totius altitudinis, ad G C altitudinem diminutam, rationis A B ſiuè G K quantitatis integræ ad G E quantitatem diminutam, v. g. triplicata. Similiter ſumatur H I æqualis G E, quæ dimi-

nuta fiat HF; ſitque ratio GC ad HC rationis HI ad HF triplicata, & ſic perpetuò fiat & in omni parte rectæ AC poſſibili; ducaturque linea per B, E, F, C, &c. Dico figuram deficientem ABEFC, eſſe complementi ſui BDCEF triplam, ſiue vt ratio quæ eſt inter AC, GC ad rationem quæ eſt inter AB ſiue Gk & GE.

Ducatur enim CB ſecans Gk in L, & per L ducatur MN parallela rectæ AC; erunt ergo parallelogramma GM, LD æqualia. Diuidatur iam LK in tres partes æquales, nimirum vt totupla ſit partis vnius, quotupla eſt ratio inter AC, GC, ſiue inter Gk, GL, rationis quæ eſt inter GK, GE. Erit itaque LK ad vnam ex illis tribus partibus, vt ratio Arithmetica quæ eſt inter GK, GL, ad rationem Arithmeticam quæ eſt inter Gk & GE, ſiue Gk mulctatam Ek tertia parte rectæ LK. Hæc poſtrema verba non benè percipimus. Interim adnotet lector quomodò Hobbes ſupponat kE, fore tertiam partem LK, quod etiam ſtatim magis confirmat. *Quoniam autem altitudo AG vel ME ſupponenda eſt ob decreſcentiam continuam minor omni quantitate data, etiam LK, (intercepta inter CB diagonalem, & latus BD) erit omni data quantitate minor; & proinde differentia inter AB, GL, omni etiam data quantitate minor. Quare (per coroll. art. 27. cap. 13.) mediæ inter AB. (Siue GK) & GL Arithmeticæ, à medijs inter eaſdem Gk, GL. Geometricis, non different; eſt ergo ratio inter AC, GC, rationis inter Gk, GE triplicata in ratione Arithmetica; quare ipſa Ek eſt tertia pars ipſius Lk.*

Siſta-

Digitized by Google



Siſtamus hic ergo. Nolumus pro nunc dubitare, medias Arithmeticas inter Gk, GL, non differre à medijs Geometricis inter eaſdem. Verùm tamen eſt, quod ſi ex hac doctrina deducitur fore Ek, tertiam partem KL, ipſa redditur valdè ſuſpecta. Cum hoc non percipiamus, attenta ſequenti propoſitione.

PROPOSITIO XIII.

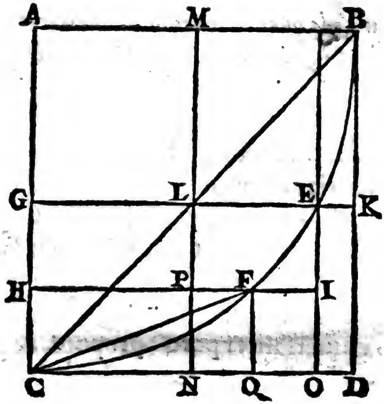
In ſemiparabola cubica vbicunque ducatur GLEk, paralle-

Digitized by Google

rallela AB, vt in ſchemate Hobbes, impoſſibile eſt kE, fore trientem Lk.

SVpponatur ergo Ek, triens Lk, & conſequenter dimidia LE. Cum ergo, ex natura parabolæ cubicæ, ſit GE, maior duarum mediarum inter AB, ſeu Gk, & GL, erit vt quadratum GK, ad quadratum GE, ſic GE, ad GL. Et per conuerſionem rationis, vt quadratum Gk, ad duo rectangula GEk, (nempe ad rectangulum GEL) vna cum quadrato Ek (nempe vna cum quadrante quadrati LE) ſic GE, ad EL. Nempe, ſumpta communi altitudine Gk, ſic rectangulum kGE, ad rectangulum KG, LE. Et permutando, vt quadratum Gk, ad rectangulum kGE, ſic rectangulum GEL, cum quadrante quadrati LE, ad rectangulum Gk, LE. Sed quadratum Gk, maius eſt rectangulo kGE. Ergo etiam rectangulum GEL, ſimul cum quadrante quadrati LE, maius erit rectangulo Gk, LE. Quod tamen falſum eſt. Nam eſt minus, cum rectangulum Gk, LE, diuidatur in rectangula GEL, kEL. Quod kEL, eſt dimidium quadrati LE. Patet ergo propoſitum.

Cum ergo impoſſibile ſit oſtenſum, fore kE, trientem kL, impoſſibile quoque erit verificari quæ ipſe ſubiungit ſic. *Et proinde ſic ducatur EO recte BD parallela, erit ſpatium ED tertia pars ſpatij LD, hoc eſt tertia pars ſpatij AL, eſt ergo ſpatium AL triplum ſpatij ED.* Cum alijs, quæ ſubiungit. Sed etiam clarius oſten-



oſtendemus in parabola quadratica; & ordinaria; ſuam Methodum probandi non videri Geometricam.

Nam ſi vera erit, certum eſt, quòd cum proportio AC, ad CG, ſit duplicata rationis AB, ad GE, oportet ſecundum ipſum, Lk, duplam fore KE; & KE, LE, fore æquales. Quod tamen non intelligimus, ſi ſequens propoſitio rectè à nobis probabitur.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XIV.

In ſemiparabola quadratica vbicunque ducatur GLEK, *parallela* AB, *vt in ſchemate Hobbes, ſemper* KE, *maior erit* EL.

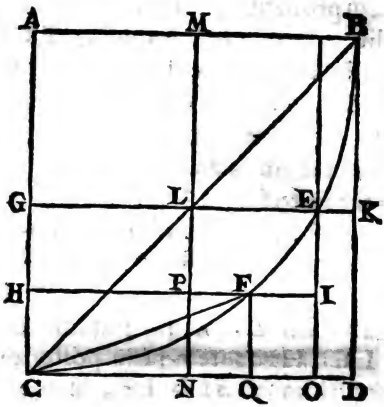
CVm enim vt AB, ad GE, ſic GE, ad GL, erit etiam per conuerſionem rationis, AB, ſeu GK, ad KE, vt GE, ad EL. Et permutando, vt KG, maior, ad GE, minorem, ſic KE, maior, ad EL, minorem. Nullibi ergo æquales. Non currit ergo Methodus.

Immò vniuerſaliter poteſt proponi, & patebit inductione.

PROPOSITIO XV.

In ſemiparabola quacunque vbicunque ducatur GLEK, *parallela* AB, *vt in ſchemate Hobbes, impoſſibile eſt fore* KE, *partem* LK, *quam dicit ipſe.*

VT diximus, hæc propoſitio patebit inductione, obſeruando modum arguendi, quem in ſuperioribus adhibuimus, quem etiam repetemus in parabola quadratoquadratica, in qua, ſecundum Hobbes, erit kE, triens LE. Cum verò GE, ſit maior trium mediarum inter KG, GL, erit vt cubus GK, ad cubum GE, ſic GE, ad GL. Et per conuer-



uerſionem rationis, vt cubus GK, ad ſui exceſſum ſupra cubum GE, ſic GE, ad LE: nempe (ſumpta communi altitudine quadrato GK) vt factum ſub GE, in quadratum GK, ad factum ſub LE, in quadratum GK. Et permutando, vt cubus GK, ad factum ſub GE, in quadratum GK, (nempe vt maius ad minus) ſic exceſſus cubi Gk, ſupra cubum GE, ad factum ſub LE, in quadratum GK. Differentia ergo cuborum kG, GE, maior erit facto ſub LE, in quadratum GK. Quod tamen falſum eſt. Nam eſt minor. Differentia enim cuborum

K Gk,

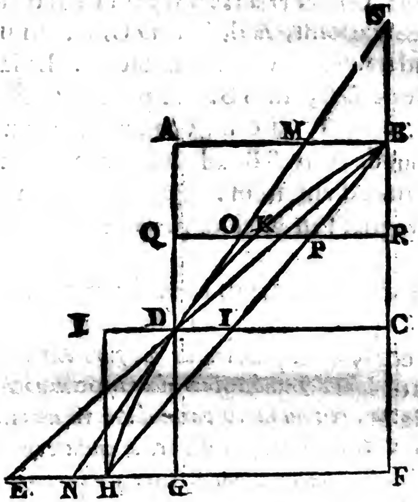
Digitized by Google

Gk, GE, ſunt cubus EK, tria facta ſub kE, in quadratum GE, & tria facta ſub GE, in quadratum Ek, vt paſſim probatur à Geometris, quorum vnus Caualerius lib. 2. Geom. Ind. propoſit. 38. Cum verò kE, ex hypotheſi, ſit triens LE, cubus KE, erit $\frac{1}{27}$ cubi LE. Tria facta ſub GE, in quadratum Ek, erunt æqualia facto ſub LE, in trientem rectanguli GEL. Tria tandem facta ſub kE, in quadratum GE, æquantur facto ſub LE, in idem quadratum. Aſt factum ſub LE, in quadratum Gk, æquatur facto ſub LE, in quadratum GE; facto ſub LE, in duplum rectangulum GEk (nempe in $\frac{2}{3}$ rectanguli GEL) & facto ſub LE, in quadratum kE; nempe $\frac{1}{9}$ quadrati LE. Hæc autem facta poſteriora ſuperant facta anteriora factis ſub LE, in trientem rectanguli GEL, & ſub LE, in $\frac{2}{27}$ quadrati LE. Patet ergo propoſitum. Sic forſitan lector experietur in altioribus poteſtatibus, & in alijs parabolis. Non enim volumus patientia lectorum abuti. Regula namque Hobbes ex dictis ſatis inficitur.

Poſt hæc eorum, quæ non bene percipimus ſuccedunt expoſita in numero 5. vbi paucis putat ſe expedire ab infinitarum parabolarum tangentibus. Inquit ergo ſic. *Tangitur autem dictarum figurarum quælibet in quolibet puncto hoc modo. Sit linea (in figur 4.) BKDH tangenda in puncto D. Iungantur puncta B, D, ducaturque DA æqualis & parallela BC; & quia figura hæc ponitur exempli cauſa ex tribus medijs tertia, ſumantur in AB tria puncta quibus ipſa AB diuiditur in quatuor*

par-

Digitized by Google



partes æquales, *ex quibus partibus ſumantur tres nempe* *A M*, (eſt error in impreſſione vult enim dicere, nempe B M) *vt* ^{AB} *ſit ad* ^{A}*M*, *vt figura* ^{B}K D C *ad ſuum complementum*; *ducta recta* M D *tanget figuram in puncto* D.

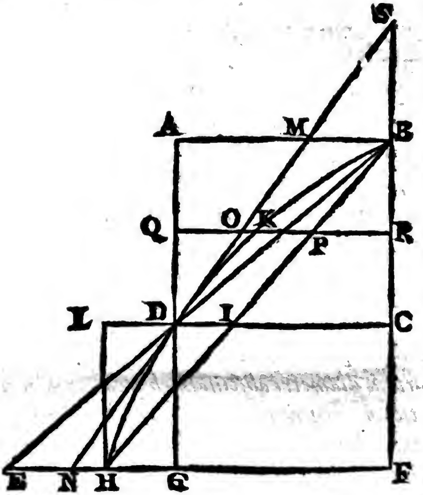
Pulcherrima quidem regula. Conuenit enim cum ea quam nos tradidimus in propoſit. 50. noſtri Miſcell. Hyperbolici, & Parabolici, ſed in parabolis principalibus dumtaxat. Cum enim ſit B A, ad A M, ſecundum ipſum, vt parabola D k B C, ad tri-

Digitized by Google

lineum DkBA: nempe vt numerus parabolæ ad vnitatem (loquendo de principalibus;) erit per conuerſionem rationis, AB, ſeu DC, ad MB, vt numerus ad numerum vnitate minutum. Et in eadem ratione erit CS, ad SB. Et per conuerſionem rationis, erit CS, ad CB, vt numerus ad vnitatem. Et diuidendo, erit SB, ad BC, vt numerus vnitate minutus ad vnitatem. Quæ eſt eadem regula à nobis aſſignata in præfata propoſit. 50. Quæ ſic ſe habet.

Si in qualibet infinitarum parabolarum ſumatur aliquod punctum, à quo ad diametrum recta linea ordinatim applicetur, diameterque ita producatur vt pars extra parabolam ſit ad partem diametri abſciſſam ab ordinatim applicata verſus verticem, vt numerus parabolæ vnitate minutus ad vnitatem. Recta linea, quæ ab extremitate inuentæ lineæ ducitur ad illud punctum, quod ſumptum fuerat; parabolam continget.

Sed videamus quomodo Hobbes ſuam regulam probet. *Ducatur enim* (inquit) *parallela RQ vtcunque inter AB & DC, ſecans BD rectam, BD curuam, MD rectam, & AD rectam in punctis P, K, O, Q; erit ergo RK, (per conſtructionem) trium Geometricè mediarum inter RQ & RP, minima.* Quid dicis Hobbes? Hoc non intelligimus. Nos putamus RK, eſſe maximam trium intermediarum inter QR, RP, non minimam. Secundum enim te figura DkBC, *eſt ex tribus medijs tertia*. Nempe ſecundum nos quadratoquadratica. In tali autem eſt vt QR, ad RP, ſic



ſic quadratoquadratum QR, ad quadratoquadratum Rk. Eſt ergo QR, ad RP, in quadruplicata ratione QR, ad Rk. Quid autem ait Euclides in Def. 11 lib. 5. element? *Quandò autem quatuor magnitudines ſint proportionales, prima ad quartam triplam habere proportionem dicetur eius, quam habet ad ſecundam, & ſemper deinceps vna plus, quoad analogia proceſſerit*. Eſt ergo kR, ſecunda quinque proportionalium; & conſequenter maxima, non minima trium intermediarum inter QR, RP. Id verò quod ex hoc col-

colligit. *Itaque (per coroll. art. 28. cap. 13.) minor eſt RK quam RO; cadit ergo MD extra figuram.* Neſcimus videre quid colligat ex illo corollario. Hoc enim ſic ſe habet. *Manifeſtum hinc eſt quod ſi quantitas aliqua diuiſa ſupponatur in partes æquales numero infinitas, differentiam intermediam Arithmeticam & Geometricam fore infinitè paruam, id eſt nullam. Atque ex hoc præcipuè fundamento videtur orta eſſe ars conſtruendi numeros illos quos vocant Logarithmos.* Potiùs videtur colligi poſſe ex numero 26. eiuſdem capitis, vbi proponitur. *Si fuerint inter eadem extrema, ſed inter ſe inæqualia, interpoſita quotcunque media, tàm in Geometrica quàm in Arithmetica ratione, totidem vtrobique, ſingula media rationis Geometricæ, erunt ſingulis medijs rationis Arithmeticæ minora.* Potius ergo videtur colligi ex hac doctrina. Quod vt verum ſit, prius eſſet probandum, OR, eſſe maiorem Arithmeticam trium intermediarum inter QR, RP; veluti etiam kR, eſt maior Geometrica trium intermediarum inter eaſdem. Non enim omnis Geometrica minor probatur omni Arithmetica, ſed ſua correſpondente; nempe maior, minor maiore; minor, minor minore. Sed poteſt dari, vt ſit error impreſſionis dum ſupra dicit. *Erit ergo RK trium Geometricè mediarum inter RQ & RP, minima.*

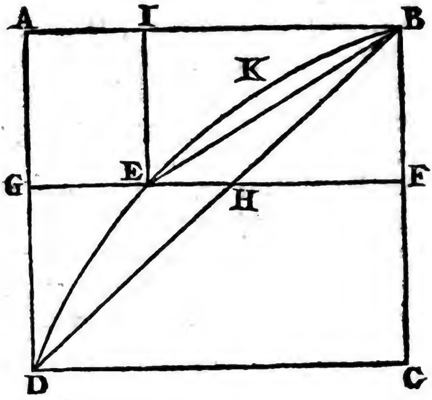
Continuetur (inquit Hobbes) *iam MD in N, & erit FN trium mediarum inter FE & FG maxima in ratione Arithmetica,* (videtur gratis dictum) *& FH trium mediarum maxima quoque inter eaſdem FE, FG*

in-

in ratione Geometrica; Quod quandò eſſet, verum etiam foret quod ſubiungit. *Quare per dictum corollarium art. 28. cap. 13.) minor erit FH quàm FN.* Sed non ex vi corollarij citati, ſed ex citata doctrina expoſita in numero 26.

Aſt quæ nullatenùs intelligimus, circa, quæque proponemus noſtras difficultates, quas putamus haud ſpernendas, ea ſunt, quæ ipſe proponit in numero 10. inquiens. *Ex ijs quæ de figuris deficientibus in parallelogrammo deſcriptis dicta ſunt, inueniri poſſunt ſpatiorum quæ determinatis temporibus motu accelerato percurruntur, ad ipſa tempora rationes, prout vno vel pluribus gradibus velocitas mobilis ſingulis augetur temporibus.* Hæc omnia vera ſunt. Sicuti hæc, quæ ſequuntur. *Sit enim (in fig. 6.) parallelogrammum ABCD, in qua deſcriptum ſit trilineum DEBC; ductaque baſi parallela vbicunque FG ſecet BD diagonalem in H, curuam BED in E; ſitque ratio BC ad BF rationis FG ad FE, exempli cauſa, triplicata; erit ergo figura DEBC complementi ſui BEDA tripla. Similiter ducta IE parallela ipſi BC; figura trilinea EKBF erit tripla complementi ſui BKEI. Erunt igitur inter ſe figuræ deficientis partes à vertice abſciſſæ à rectis baſi parallelis (nempe DEBC, EKBF;) vt parallelogramma AC, IF, ideſt, in ratione compoſita altitudinum & baſium; quoniam ergo altitudo BC ad altitudinem BF ponitur eſſe in ratione baſium DC, FE triplicata, erit figura DEBC ad figuram EkBF in ratione DC ad FE quadruplicata. Eadem Methodo inueniri poteſt ratio cuiuslibet ex trilineis prædictis*

Digitized by Google



dictis ad partem eiuſdem quamcunque abſciſſam à vertice recta baſi parallela.

Iam ſicut figuræ dictæ deſcriptæ intelliguntur ex baſe, puta CD decreſcente donec deſinat in puncto, vt in B, ita etiam deſcriptæ eędem intelligi poſſunt à puncto, vt B, creſcente donec acquirat magnitudinem quamlibet, vt CD.

Intelligatur igitur à puncto B creſcente in magnitudinem CD, deſcripta BEDC. Quoniam ergo BC eſt ad BF in ratione CD, ad FE triplicata. Ad hunc locum vſque egregiè diſcurrit. *Erit inuertendo (vt mox oſtendemus) FE ad CD in ratione BF ab BC triplicata.* Hic diſcurſus à nobis non percipitur,

& eſt

& eſt eiuſdem rationis cum alio ſupra exploſo in propoſit. ſed magis officit, quia inquit (*vt mox oſtendemus.*) Quod ſi præſtabit, erit nobis Magnus Apollonius, & præſtabit id, quod nobis apertè falſum videtur. Recolantur ea, quæ probauimus in propoſit. 11. & diſcurrendo eodem modo, ſed rationem extendendo ad quartam proportionalem, concludemus propoſitum. Putamus enim eſſe veriſſimam doctrinam ſequentem, quam vnuſquiſque probare poterit inductione.

PROPOSITIO XVI.

Si prima magnitudo habeat ad ſecundam rationem vtcunque multiplicatam eius, quam habet tertia ad quartam. Conuertendo, habebit ſecunda ad primam vtcunque multiplicatam eius, quam habet quarta ad tertiam.

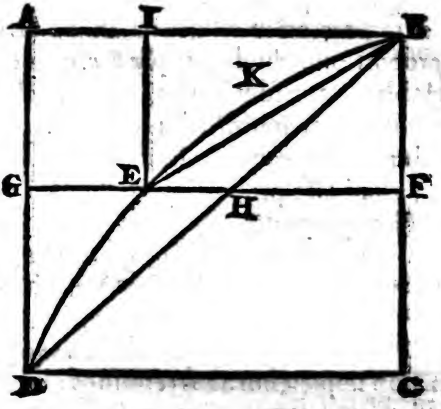
NOn ergo videtur bonus diſcurſus. *Quoniam ergo BC eſt ad BF in ratione CD, ad FE triplicata, erit inuertendo, FE ad CD in ratione BF ad BC, triplicata.* Sed diſcurramus in hoc caſu. Dic quæſo Hobbes? CB, eſt ad BF, in ratione DC, ad EF, triplicata. Sed etiam cubus DC, eſt ad cubum EF (ex 33. 11. elem.) in ratione triplicata DC, ad EF. Ergo vt CB, ab BF, ſic cubus DC, ad cubum EF. (Et hæc eſt ipſamet natura parabolæ.) Ergo & conuertendo, vt BF, ad BC, ſic cubus EF, ad cubum DC. Sed ex citat. propoſit.

L elem.

elem. eſt cubus ad cubum in triplicata ratione EF, ad DC. Ergo etiam BF, ad BC, erit in triplicata ratione EF, ad DC.

Ex hoc principio, quod nobis falſum videtur, deducit perparam, quæ deducit. Et reducitur ad inferendum. Semiparabolam EkBF, eſſe ad ſemiparabolam DEBC, in quadruplicata ratione BF, ad BC. Quod eſt falſum, nam eſt in quadruplicata ratione EF, ad DC, vt luculenter probauimus in prop. 3. lib. 1. de Infin. Parab. Non ergo ſpatiorum, quæ determinatis temporibus motu accelerato percurruntur, ad ipſa tempora, rationes inueniuntur ex parabolis, vt ipſe putat, ſed ex trilineis, vt nos ſupra fecimus.

Sed magis admiramur ex ijs, quæ ſubiungit, nitens probare, probatu impoſſibile viſum nobis, dicens. *Reſtat vt oſtendamus rationem FE ad CD, eſſe rationis BF ad BC triplicatam. Quia ratio (CD hoc eſt) FG ad FE ſubtriplicata eſt rationis BC ad BF, erit quoque ratio FG ad FE ſubtriplicata rationis FG ad FH; quare ratio FG ad FH eſt triplicata rationis FG (ideſt CD) ad FE.* Omnia hæc geometricè procedunt; *ſed in quatuor continuè proportionalibus quarum prima eſt minima, ratio primæ ad quartam (per cap. 13. art. 16.) ſubtriplicata eſt rationis tertiæ ad vltimam.* Doctrina ſecundum nos haud bene ſonans. Videndum eſt ergo quomodò hanc probet in loco quem citat. Si enim hanc probabit, rectè ſequuntur cætera. Inquit ergo ſic.



Ratio maioris ad minus per numerum multiplicari dicitur, quando ipſi aliquot rationes æquales ſiue eædem ſibi adduntur; nam multiplicatio nihil aliud eſt quàm æqualium repetita additio. Itaque ſi rationi alia ratio addatur ipſi æqualis, fient tres quantitates, quarum ratio primæ ad vltimam, dupla eſt primæ ad ſecundam; ſin primæ rationi duæ æquales ipſi addantur, erunt quatuor quantitates, in quibus ratio primæ ad vltimam tripla erit primæ ad ſecundam, & ſic deinceps. Sed ad euitandam confuſionem quæ oriri ex eo poteſt, quod ratio 2 ad 1 vocatur dupla, & 3 ad 1 tripla, &c. ſolent plerique pro ratione dupla, tripla, &c. dicere duplicatam, triplicatam, & ſic deinceps. Hæc omnia tranſeant. Sed præſtat retinere vſum communem Geo-

metrarum, vocando duplam proportionem duplicatam, & triplam triplicatam.

Pro autem maiori intelligentia, animaduertatur, quod proportiones duplæ, triplæ &c. quas conſiderauit Hobbes, non ſunt duplæ, & triplæ abſolutè, ſed alterius proportionis. Meliùs ergo, & rectius geometrizabimus, ſi dicamus, aliud eſſe proportionem duplam, aliud eſſe proportionem duplam proportionis. Nam proportio dupla reſpicit tantum duos terminos; at proportio, dupla proportionis, reſpicit quatuor terminos. Nam ſi diſponantur hi numeri 4. 2. 1. Proportio 4. ad 2. eſt dupla, & pariter proportio 2. ad 1. eſt dupla, & quælibet harum proportionum non reſpicit niſi duos terminos: at proportio 4. ad 1. quia componitur ex duabus proportionibus æqualibus, eſt quidem dupla, ſed cuius? Proportionis 4. ad 2. & proportionis 2. ad 1. Quod ſi loquamur abſolutè, proportio 4. ad 1. non eſt dupla, ſed quadrupla. Vndè apparet euidenter, quòd quandò fit tranſitus à comparatione proportionum cum proportionibus, ad comparationem proportionis terminorum, non fiunt æqualia incrementa. Ratio enim 4. ad 1. eſt duplicata proportionis 4. ad 2. Sed poſtea abſolutè ſumpta eſt quadrupla. Sic ſi ratio decreſcat, vt numeri ſint 1. 2. 4. Ratio 1. ad 4. eſt duplicata rationis 1. ad 2. reſpectiuè, ſed poſtea abſolute ſumpta eſt ſubquadrupla. Et hæc dicta ſint ad vberiorem ſcientiam.

Sequitur Hobbes. Quod ſi ratio detur minoris ad ma-

ius,

Digitized by Google

lus, rationeſque aliquot addantur ipſi æquales, non multiplicari propriè ſed ſubmultiplicari dicitur; nam cum ſit ratio defectus, defectus autem multiplicati faciant ſemper minorem rationem, tanto minor erit ratio quanto pluries multiplicantur; itaque quando additur primæ rationi altera, ratio primæ quantitatis ad tertiam ſemiſſis eſt rationis primæ ad ſecundam quando rurſus additur his tertia, ratio primæ quantitatis ad quartam triens eſt rationis primæ ad ſecundam, &c. Hæc omnia tranſeant. *Sed pro ſemiſſe, triente, &c. vulgo dicitur ratio ſubduplicata, ſubtriplicata, &c.* In his vltimis verbis putamus deceptionem Hobbes conſiſtere. Non enim illa ratio vocatur ſubduplicata, ſubtriplicata, &c Sed duplicata, triplicata &c. Pro autem maiori intelligentia, exemplificetur in numeris ſupra poſitis. Sint hi 1. 2. 4. In quibus apparet 1. ad 4. habere minorem rationem, quam habet ad 2. Sed poſtea 1. ad 4. habet duplicatam proportionem eius, quam habet ad 2. Sunt enim 1. 2. 4. termini continuò proportionales. Inquit autem Euclides in Def. 10. 5. elemen. *Quandò tres magnitudines proportionales ſint, prima ad tertiam duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet ad ſecundam.* Potiùs ergo Geometrizandum eſt, vt ſupra fecimus, agnoſcendo, aliud eſſe proportionem duplam, aliud proportionem duplam proportionis. Nam proportio dupla, eſt ſemper maioris ad minus. Aſt proportio dupla proportionis non ſic, ſed aliquandò poteſt eſſe maior, aliquan dò minor. Maior in proportionibus exceſſus; minor in proportionibus defectus. 4. enim ad 1.

habet

habet duplam proportionem eius, quam habet ad 2. & eſt maior ea. E contra autem, proportio 1. ad 4. eſt duplicata eius quidem, quam habet ad 2. ſed ea eſt minor. Vndè illa eſt dupla maior; hæc verò dupla minor, quia in minoritate conſiſtit eius eſſentia.

Et quidem doctrina hæc Hobbes eſt contrarijſſima doctrinis omnium Geometrarum, qui ſuper elementa Euclidis fundarunt ſuas omnes ratiocinationes. Quantum autem contrarietur Euclidis doctrinis, vnuſquiſque poterit colligere ex pluribus ipſius locis. In definitione enim 10. ſupra citata inquit abſolutè. *Quandò tres magnitudines proportionales ſint* (non dicit in propoſitione exceſſus, vel defectus, ſed abſolutè) *prima ad tertiam duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet ad ſecundam*. Sic in Def. 11. *Quando autem quatuor magnitudines ſint proportionales, prima ad quartam triplam habere proportionem dicetur eius, quam habet ad ſecundam, & ſemper deinceps vna plus quoad analogia proceſſerit*. Sed in his non eſt amplius demorandum.

Poſt hæc ad præſentem materiam infinitarum parabolarum attinentia, ſunt quædam illorum, quæ continentur in cap. 23. In cuius numero 9. aſſignat hanc regulam generalem. *Centrum æquilibrij cuiuslibet figuræ deficientis ſecundum rationes, diminutæ altitudinis & diminutæ baſis, commenſurabiles, cuius completum eſt parallelogrammum, vel cylindrus, vel parallelepipedum, axem figuræ ita diuidit, vt pars ad verticem, ſit ad partem*

reli-

reliquam, vt figura completa ad ipſam deficientem. Hæc regula in infinitis parabolis omnibus, & pariter in omnibus infinitis conoidibus vera eſt. Aſt propoſitio Hobbes eſt in calce deficiens. Suum enim eſt probare in ſemiparabolis, quod ſi diſtantia centri æquilibrij figuræ completæ ad aliam diſtantiam habeat rationem compoſitam ex ratione momenti figuræ completæ, ad momentum figuræ deficientis, & ex ratione reciproca ponderis deficientis ad pondus completæ, in puncto terminante talem diſtantiam ſit centrum æquilibrij deficientis. Quod tamen eſt veriſſimum.

In corollario autem ſecundo docet vbi reperiatur in numeris centrum grauitatis infinitorum conoideorum, & attamen hoc non probat.

Sed in numero 10. aſſignat aliam regulam generalem, quam vtique veram cenſemus, ac cum noſtris concordantem, ſed ſua probatione neſcimus videre quid concludat: immò nobis videtur admittere quoddam falſum. Regula talis eſt. *Diameter ęquilibrij complementi, ſemiſſis figuræ cuiuslibet earum quę habentur in tabella articuli tertij capitis decimi ſeptimi, diuidit eam quę per verticem figurę ducitur baſi parallela & ęqualis, ita vt pars ad verticem ſit ad reliquam, vt figura completa ad complementum.* Regula, vt diximus veriſſima eſt. Sed non putamus vera, quæ dicit quaſi in fine probationis ante corollarium. Nimirum. *Sunt autem omnes ſimul applicatæ in AICD momentum eius, & omnes applicatæ in AICB momentum ipſius AICB.*

Nos

Nos putamus falſum eſſe momentum trilinei CIAD, eſſe omnes applicatas in trilineo, & pariter in ſemiparabola.

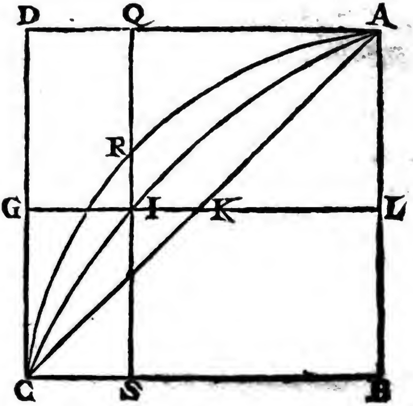
Sed potius ſi perpendamus ea, quæ tradidit Cauaṡlerius in exercit. 5. & communiter docent Geometræ in materia momentorum, & etiam ipſemet Hobbes in numero 7. vbi oſtendit momentum parallelogrammi &c. eſſe triangulum, dicimus.

PROPOSITIO XVII.

Momentum trilinei CIAD, eſſe omnes applicatas in trilineo, cuius ratio ordinatim applicatarum excedat rationem ordinatim applicatarum in ipſo, ratione radicali.

V. G. Eſto aliud trilineum DARC, in quo ratio CD, ad QR, ſit compoſita ex ratione DC, ad QI, & ex ratione DA, ad AQ, (quæ eſt æqualis radicali.) Dicimus omnes ordinatim applicatas in trilineo DARC, fore momentum ipſius trilinei DAIC. Quòd quidem facilè patebit ducendo arbitrariè QRIS, ſecantem omnia prout in ſchemate. Momentum DC, ad momentum QI, habet rationem compoſitam ex ratione momenti DC, ad momentum QS, (nempe ex ratione DA, ad AQ) & ex ratione momenti QS, ad momentum QI, (nempe ex ratione magnitudinis QS, ſeù DC, ad magnitudinem QI.) Sed ratio DC, ad QR, eſt compoſita, per ſuppoſitionem,

ex



ex ijſdem proportionibus. Ergo ſi DC, ſit momentum ipſius DC, erit QR, momentum ipſius QI. Et ſic de omnibus alijs. Patet ergo propoſitum.

COROLLARIVM.

Cum verò totum triangulum DAC, ſit momentum totius parallelogrammi DB, & trilineum DARC, momentum trilinei DAIC; erit exceſſus trianguli ſupra trilineum, nempe exceſſus ſemiparabolæ ARCB, ſupra triangulum CAB, momentum ſemiparabolæ AICB.

M Ne-

Neſcimus ergo videre, qualiter ex hac doctrina, quæ nobis videtur falſa. *Sunt autem omnes ſimul applicatæ in AICD momentum eius, & omnes applicatæ in AICB momentum ipſius AICB:* concludat Hobbes. *Quare momenta complementorum ſemiſſium figurarum deficientium in tabella, art. 3 cap. 17. comparatarum, ſunt vt ipſę figurę deficientes; & propterea recta AD diuiditur à diametro ęquilibrij in ea ratione, vt pars ad verticem, ſit ad reliquam, vt figura completa ABCD ad complementum AICD.*

Sed de his momentis exactiùs fortaſſis aliquandò. Nos namque in Hobbes nolumus alia conſiderare. Sed iam deueniamus ad Vuallisij Spirales.

Digitized by Google

DE INFINITIS SPIRALIBVS VVALLISII.

ANno 1660. Menſe Iulij publicauimus Opuſculum noſtrum. *De Infinitorum Spiralium Spatiorum Menſura*. Quod quum ad calcem vſque incluſiuè impreſſum fuiſſet, admonente Clariſſimo Geometra Petro Paulo Carauaggio, anxiè tranſcurrimus Arithmeticam infinitorum profundiſſimi Geometræ Ioannis Vuallisij Sauiliani in Academia Oxonienſi Geometriam profitentis. Cum enim certiores nos feciſſet præfatus Carauaggius, Vualliſium de Infinitis Spiralibus pertractaſſe; rationabilis timor nos concuſſit, ipſum ſcilicet præiuiſſe; ac de infinitis ſpiralibus loquendo, nihil aliud eſſet, quàm actum agere. Aſt non ſolum inſpeximus, ipſum de infinitis ſpiralibus verba feciſſe; ſed etiam de illorum multis, circa quæ & Caualerius anno 1656 in ſuis exercitationibus Geometricis, & nos, ambobus poſteriores, in noſtris operibus; quinimmò in præſenti opuſculo etiam. Quod verò in dicta digreſſione ingenuè faſſi ſumus, neutique pœnitere ſcripta noſtra typis conſignaſſe, denuò repetimus. Proceſſimus namque per Metho-

dum à ſua totaliter diuerſam; & iuxta nobis connaturale, geometrica geometricè pertractauimus.

Porrò quòad infinitas ſpirales attinet, à noſtrarum diuulgatione haud fuit abſtinendum. Siquidem, noſtræ à ſuis diſtant toto cœlo. Suæ namque diuerſificantur ex diuerſa proportione in ſpirales incidentium ab initio ad inuicem ſecundum multiplicatam proportionem angulorum. Aſt in noſtris res e contra accidit. Incidens namque ad incidentem eſt in ſubmultiplici proportione anguli ad angulum. Colligimus nos primum circulum fore ad ſpatia ſpiralia, vt numerus binarió auctus ad numerum. Colligit ipſe, eſſe vt numerus binario auctus ad vnitatem. Exiſtimat ipſe proportionem circuli ad dicta ſpatia ſpiralia eandem fore cum ratione parallelogrammi ad infinita trilinea. Exiſtimamus nos, talem rationem eſſe eandem cum ratione trianguli ad ſui exceſſum ſupra infinita trilinea. Sed hæc omnia, quantum ſufficere arbitrabamur expoſita, videat lector in digreſſione citata. Vnum cupimus animaduerti, etiam illo tempore nos valdè hæſitaſſe circa Vuallisij doctrinam. Et quod dubios nos reddebat, erat, analogiam illam, quam Phęnix ingeniorum Torricellius conſiderauit inter ſpiralem linearem, & parabolam quadraticam, minimè ſeruari inter alias infinitas parabolas, & infinitas ſpirales Vualliſianas. Mirum namque videbatur ſeruari eaſdem proportiones, vt in pagina 119. & 120. traditum fuit, ſecùs verò analogiam. Aſt tunc temporis non

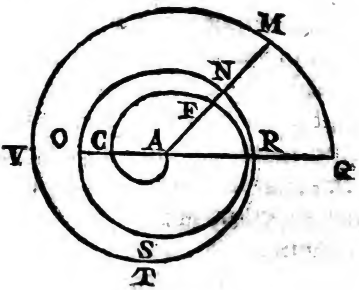
va-

Digitized by Google

valuimus nos certiores reddere de veritate aſſertorum Vualliſij. Methodo namque à ſua diuerſa non conſtabat nec de veritate, nec de falſitate illorum. Hoc credimus in præſenti obtinere ex doctrinis in librunculo præſenti explicatis. Licet autem diſcrimen inter noſtra, ac Vualliſiana infinita ſpatia ſpiralia fuerit luculenter expoſitum in digreſſione noſtra antedicta; attamen vt neceſſaria ad dicendorum capeſcentiam omnibus ſint in promptu, ea denuò paucis repetemus.

Diximus initio Opuſculi noſtri prædicti, ſpirales noſtras generari ex duplici motu eodem tempore peracto, nimirum in ſequenti ſchemate, puncti A, æqualiter moti per ſemidiametrum AR, & ſemidiametri AR, circa centrum A, puncto R, deſcribentis peripheriam, vel æquabiliter, vel ita vt circumferentia ſit ad circumferentiam, ſiue angulus ad angulum, vt variæ temporum poteſtates. Emanat ex hoc, incidentem. v.g. AC, fore ad incidentem AF, in ſubmultiplici proportione anguli, ad angulum, ſeù arcus, ad arcum. Pariter Vualliſij infinitæ ſpirales creantur ex duplici motu eorundem mobilium, ſed modis oppoſitis. Motus enim ſemidiametri AR, per circumferentiam ſemper eſt æquabilis Aſt motus puncti A, per ſemidiametrum, vel æquabilis, vel variè acceleratus iuxta varias poteſtates temporum. Sic eueniet, vt incidens. v.g. AC, ſit ad incidentem AF, in multiplici proportione arcus RSO, ad arcum RSON, ſeù an-

Digitized by Google



guli AOSRA, ſubtenſi, ad angulum ſubtenſum à ab arcu RSON. Si ergo motus per AR, erit in duplicata ratione temporis, ſeù motus AR, per peripheriam, erit ſecunda ſpiralis Vualliſij. Si in triplicata, erit tertia. Et ſic deinceps. His autem perceptis, ſit

PROPOSITIO XVIII.

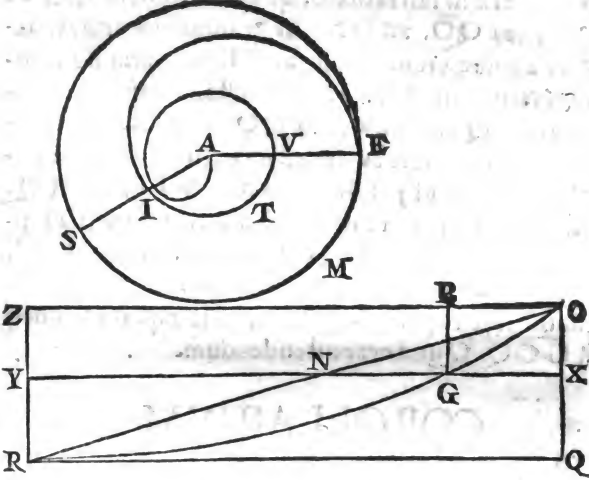
Exceſſus primi circuli ſupra quodlibet ſpatium ſpirale Vualliſij ex prima reuolutione, eſt æqualis trilineo parabolico quadratico; in quo ratio baſis ad quamlibet ordinatim applicatam, ſit ad rationem radicalem, vt numerus ſpiralis vnitate auctus, ad numerum, & cuius diameter ſit æqualis ſemidiametro circuli, baſis verò circumferentiæ.

HÆc propoſitio probabitur ferè eodem modo, quo ſtabilita fuit propoſit. 6. tractatus noſtri De infin. ſpir. &c. adhibendo congruens trilineum. Sit ergo quæcunque ſpiralis ex prima reuolutione AIE, AE, verò ſit linea reuolutionis initium, ſitque etiam ſemidiameter circuli primi; item ſit parallelogrammum rectangulum ZQ, circumſcriptum ſemiparabolæ ZOGR, cuius baſis ZR, æqualis AE, vertex O, quæ ſit talis naturæ, vt acta YX, parallela RQ, ſecante etiam OR, in N, ratio YX, ſeu RQ, ad GX, ſit ad rationem radicalem YX, ſeu RQ, ad NX, vel QO, ad OX, vt numerus ſpiralis vnitate auctus, ad numerum ſpiralis. V. g. ſi ſpiralis ſit prima, ſeu Archimedea, ratio RQ, ad GX, ſit duplicata rationis QO, ad OX. Siſi ſecunda, ratio RQ, ad GX, ſit ſeſquialtera rationis QO, ad OX. Si tertia, ſeſquiquarta. Et ſic in infinitum. Sit inſuper RQ, æqualis circumferentiæ EMSE. Dico trilineum RGOQ, æquale fore exceſſui circuli radij AE, ſupra ſpatium ſpirale AIEA. Centro A, interuallo qualibet AV, deſcribatur circuli paripheria ſecans ſpiralem in puncto V, & facta OX, æquali AV, ducatur YX, parallela RQ, ſecans omnia prout in ſchemate. Circumferentia radij AE, ad arcum VTI, habet rationem compoſitam ex ratione ipſius ad circumferentiam radij AV, (nempe radij EA, ad AV) & circumferentiæ radij VA, ad arcum VTI; nem-

pe

pe circumferentiæ radij EA, ad arcum EMS. Sed cum ratio EA, ad AV, ſupponatur per hypotheſim, multiplicata peripheriæ ad arcum ſecundum numerum ſpiralis. Nimirum in prima ſpirali, ſit EA, ad AV, vt circumferentia radij EA, ad arcum EMS. In ſecunda, ſit EA, ad AV, in duplicata ratione circumferentiæ ad arcum. In tertia, in triplicata: Et ſic in infinitum; Erit circumferentia ad arcum in ſubmultiplicata ratione EA, ad AV, ſecundum numerum ſpiralis. Nempe in prima, vt EA, ad AV. In ſecunda, in ſubduplicata ratione EA, ad AV. In tertia in ſubtriplicata, & ſic in alijs. Ergo ratio circumferentiæ radij EA, ad arcum VTI, erit compoſita ex ratione EA, ad AV, & ex ſubmultiplicata proportione EA, ad AV, ſecundum numerum ſpiralis. Sed talem ſubmultiplicatam proportionem EA, ad AV, habet EA, ad maiorem mediarum continuò quotus eſt numerus ſpiralis vnitate minutus, quæ proportio eſt etiam talis pars proportionis EA, ad AV, vt ſit ad ipſam vt vnitas ad numerum. V.g. in prima ſpirali, vbi numerus eſt vnitas, numerus vnitate minutus eſt nihil, & media nulla, & proportio EA, ad AV, eſt quæſita. In ſecunda, media inter EA, AV, eſt vnica, & proportio EA, ad ipſam eſt ½ proportionis EA, ad AV. In tertia, mediæ ſunt duæ, & ratio EA, ad maiorem eſt ⅓ rationis EA, ad AV. A primo ergo ad vltimum ratio circumferentiæ radij EA, ad arcum VTI, eſt compoſita

ex



ex ratione E A, ad A V, & ex tali parte rationis E A, ad A V, quæ ſit ad ipſam vt vnitas ad numerum. Sed ex talibus proportionibus componitur talis ratio, quæ ad rationem E A, ad A V, ſit vt numerus ſpiralis vnitate auctus ad numerum. V. g. in prima ſpirali, ex ratione E A, ad A V, & ex alia ratione E A, ad A V, fit duplicata ratio E A, ad A V. In ſecunda, ex ratione E A, ad A V, & ex ſubduplicata ratione E A, ad A V, fit ſeſquialtera rationis E A, ad A V. In tertia, ex ratione E A, ad

N AV,

A V, & ex eius triente, fit eius ſeſquitertia. Et ſic in alijs. Ergo circumferentia radij E A, ad arcum V T I, erit in tali ratione, quæ ad rationem E A, ad A V, ſeu Q O, ad O X, ſit vt numerus vnitate auctus ad numerum. Sed ſuppoſuimus etiam ab initio, rationem R Q, ad G X, eſſe ad rationem radicalem R Q, ad N X, ſeu Q O, ad O X, vt numerus ſpiralis vnitate auctus ad numerum. Ergo vt circumferentia radij E A, ad arcum V T I, ſic R Q, ad G X. Et permutando. Sed circumferentia ſuppoſita fuit æqualis R Q. Ergo etiam arcus V T I, erit æqualis G X. Et hoc vbilibet. Ergo exceſſus circuli ſupra ſpatium ſpirale, erit æqualis trilineo R G O Q. Quod erat oſtendendum.

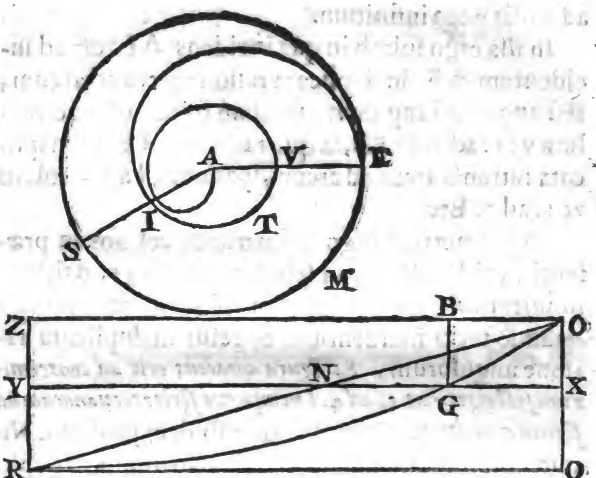
COROLLARIVM.

Cum ergo triangulum R N O Q, ſit æquale circulo radij A E, erit exceſſus trianguli ſupra trilineum R G O Q, æqualis ſpatio ſpirali A I E A.

SCHOLIVM.

Infinita ergo trilinea R G O Q. erunt illa de quibus loquuti ſumus in propoſit. 8. in quibus ratio N X, ad X G, eſt talis fractio rationis radicalis R Q, ad N X, vt eius numerator ſit vnitas, denominator verò 2. 3. 4. &c. in progreſſione Arithmetica. Vbi etiam concluſum fuit, rectangulum Z Q,

fore



fore ad trilineum R G O Q, vt duplus numerus denominatoris fractionis vnitate auctus, ad ipſum numerum denominatoris. Nempe vt 5. ad 2. Vt 7. ad 3. Vt 9. ad 4. Et ſic in infinitum. Ergo triangulum R N O Q, dimidium parallelogrammi, erit ad trilineum, vt idem antecedens, ad duplum numerum denominatoris. Nempe vt 5. ad 4. Vt 7. ad 6. Vt 9. ad 8. Et per conuerſionem rationis, & conuertendo, erit exceſſus trianguli ſupra trilineum ad ipſum triangulum, & conſequenter ſpatium ſpirale ad ipſum

primum circulum, vt vnitas ad duplum numerum vnitate auctum. Nempe vt 1. ad 5. Vt 1. ad 7. Vt 1. ad 9. Et ſic in infinitum.

In illa ergo ſpirali in qua incidens AI, eſt ad incidentem AE, in duplicata ratione arcus ad arcum, ſeù anguli ad angulum, ſpatium ſpirale eſt ad circulum vt 1. ad 5. In illa, in qua ratio AI, AE, eſt triplicata rationis arcus ad arcum, ſpatium eſt ad circulum vt 1. ad 7. Etc.

Ageometricè ergo diſcurrimus vel nos in præſenti, vel Vualliſius in ſchol. propoſit. 45. Arithm. infinitorum, vbi colligit (vt ibidem licet videre) quandò ratio incidentium augetur in duplicata ratione angulorum, *Et figura adiacens erit ad contermi-num ſectorem, vt* 1. *ad* 4. (*nempe vt ſeries tertianorum ad ſeriem æqualium.*) Cum alijs, quæ ibidem profert. Nimirum quandò incidens eſt ad incidentem in triplicata ratione arcus ad arcum, vel in quadruplicata &c. *eſſe figuram adiacentem ad conterminum ſectorem, vt* 1. *ad* 5. 6. Etc.

Quæ etiam dicit de menſura ipſarum linearum ſpiralium non benè percipimus. Sed hæc prætereamus; nobis enim ſufficit ſuppleuiſſe defectui præfatæ digreſſionis; illaque ſpatia ſpiralia menſuraſſe, quæ nequiuimus illo tempore, carentes doctrinis ſuperiùs expoſitis: nimirum trilineis parabolicis proportionatis. Quòd verò diuerſa collegerimus ab Vuallisio, prouenit ex eo, quòd nos perambulauimus veterem Caualerij viam. Vuallisius verò nouam

Digitized by Google

quam ſtruit. Quæ autem tutior ſit, ac ad veritatem ducens, examinet Lector. Nobis enim videtur de præfatis certiſſimam ſcientiam poſſidere. Quamuis aliundè ſumma Vuallisij authoritas, profundumque ingenium in Geometricis, valdè nos concutiat.

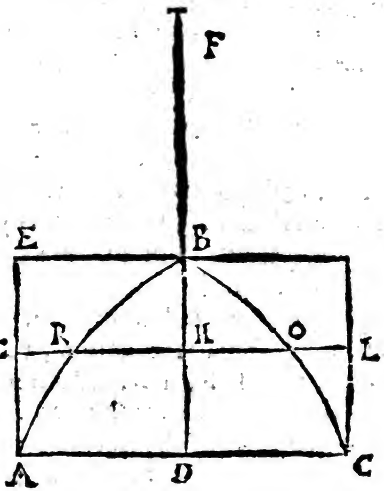
Quid quid ſit, certum eſt, tàm noſtras infinitas ſpirales, in quibus anguli ad angulos ſunt in multiplicatis rationibus incidentium; quàm Vuallisianæ, in quibus anguli ad angulos ſunt in ſubmultiplicatis rationibus incidentium, poſſe ad infinitè infinitas dilatari; ſecundum quod ipſa trilinea parabolica fuerunt ſic ampliata. Quodlibet enim trilineum inſeruiet vni ſpatio ſpirali, quod ex illo menſurabitur. Sed omittamus hæc Lectorum induſtriæ, & ad alia properemus.

DE INFINITIS CONOIDIBVS HYPERBOLICIS.

QVam fœcunda, veritatumque ferax extet infinitarum parabolarum doctrina, vnicuique manifeſtum erit recogitanti in noſtris operibus firmata. Aſt nec hucuſque exinanita putanda eſt. Pariet enim adhuc menſuram, & centra grauitatis infinitorum ſolidorum, quæ infinita Conoidea Hyperbolica iure meritò nuncupari poſſumus. His famulantur infinita trilinea principalia. Et ex illis hauriemus antedicta ſymptomata de talibus conoidibus, quæ dici poterunt principalia. Quumque infinita trilinea fuerint extenſa ad infinitè infinita. Lector poterit ſuo Marte etiam hæc conoidea ampliare. Geneſim verò cum cœteris talium infinitorum ſolidorum, recenter nobis ſubminiſtrata fuit à Methodo, qua in propoſit. 16. & 17. Miſcellanei noſtri Geometrici parte 1. vſi ſumus in cubatione Conoidis Hyperbolici ordinarij, Geometris ſat familiaris.

Hæc autem talis eſt. Cogitemus figuram ABC, deficientem ad partes B, cuius baſis ADC, dia-

me-



meter DB, quæ taliter ſit continuata ad F, vt vbicunque applicatis ordinatim AD, RH, ſit vt quadratum AD, ad quadratum RH, ſic differentia quarumlibet poteſtatum DF, FB, ad differentiam poteſtatum HF, FB. Et ſic vbilibet.

Siſit vt quadratum AD, ad quadratum RH, ſic DB, differentia inter DB, FB, ad BH, differentiam inter HF, FB. Eſt luce clarius, figuram ABC, fore parabolam quadraticam.

Item, ſi ſit vt quadratum AD, ad quadratum

PH,

RH, ſic differentia quadratorum DF, FB, ad differentiam quadratorum HF, FB. Figuram eſſe hyperbolam ordinariam, cuius centrum F, ex centro FB, paucis fiet manifeſtum. Nam differentia quadratorum DF, FB, eſt rectangulum ſub DB, & ſub compoſita ex DB, & ex dupla FB. Pariter differentia quadratorum HF, FB, eſt rectangulum ſub HB, & ſub compoſita ex HB, & ex dupla BF, quæ erit diameter tranſuerſa hyperbolæ. Hæc omnia etiam parum in doctrinis conicorum exercitatis ſunt obuia.

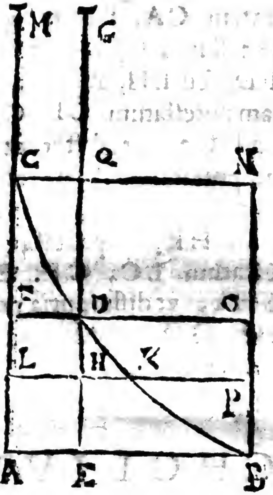
Quandò verò ſit vt quadratum AD, ad quadratum RH, ſic differentia cuborum, vel quadratoquadratorum, &c. DF, FB, ad differentiam cuborum, vel quadratoquadratorum, &c. HF, FB; neſcimus tunc cuius indolis extent figuræ ABC. Vocabimus autem ipſas cum duabus antecedentibus, nempe cum vera Hyperbola, & cum Parabola, infinitas hyperbolas. Quæ ſi intelligantur rotari circa BD, facile ſolidorum genitorum aſſignabimus menſuras, & centra grauitatis. Sed pro his ſit

PROPOSITIO XIX.

Si trilineum Parabolicum quodcumque ſeriei principalis ſecetur DE, diametro parallela, & in ipſo ordinatim applicetur LHK. Erit EB, ad HK, vt differentia poteſtatum EQ, QD, eiuſdem gradus, cum trili-

neo,

neo, ad ſimilem differentiam homogenearum poteſtatum HQ, QD.

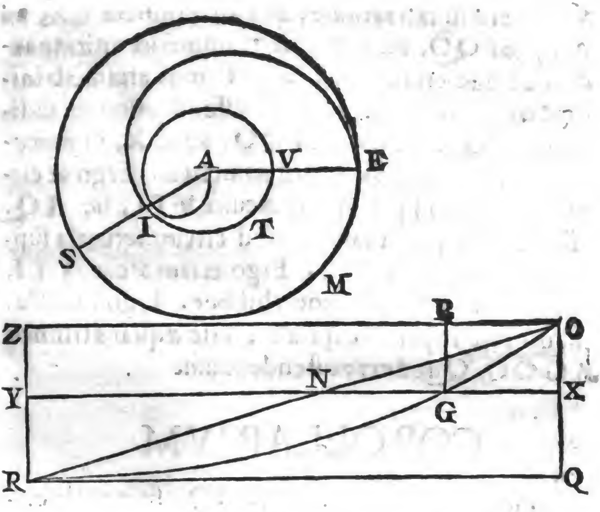


NImirum, ſi trilineum ſit triangulum, vt ED, ad DH. Si trilineum ſit quadraticum, vt differentia quadratorum EQ, QD, ad differentiam quadratorum HQ, QD. Si cubicum, vt differentiæ cuborum. Et ſic in infinitum. Hæc propoſitio probabitur eo modo, quo probata fuit propoſit. 16. citat. Miſcell. Ordinatim applicetur etiam

FDO,

pe circumferentiæ radij EA, ad arcum EMS. Sed cum ratio EA, ad AV, ſupponatur per hypotheſim, multiplicata peripheriæ ad arcum ſecundum numerum ſpiralis. Nimirum in prima ſpirali, ſit EA, ad AV, vt circumferentia radij EA, ad arcum EMS. In ſecunda, ſit EA, ad AV, in duplicata ratione circumferentiæ ad arcum. In tertia, in triplicata; Et ſic in infinitum; Erit circumferentia ad arcum in ſubmultiplicata ratione EA, ad AV, ſecundum numerum ſpiralis. Nempe in prima, vt EA, ad AV. In ſecunda, in ſubduplicata ratione EA, ad AV. In tertia in ſubtriplicata, & ſic in alijs. Ergo ratio circumferentiæ radij EA, ad arcum VTI, erit compoſita ex ratione EA, ad AV, & ex ſubmultiplicata proportione EA, ad AV, ſecundum numerum ſpiralis. Sed talem ſubmultiplicatam proportionem EA, ad AV, habet EA, ad maiorem mediarum continuò quotus eſt numerus ſpiralis vnitate minutus, quæ proportio eſt etiam talis pars proportionis EA, ad AV, vt ſit ad ipſam vt vnitas ad numerum. V.g. in prima ſpirali, vbi numerus eſt vnitas, numerus vnitate minutus eſt nihil, & media nulla, & proportio EA, ad AV, eſt quæſita. In ſecunda, media inter EA, AV, eſt vnica, & proportio EA, ad ipſam eſt $\frac{1}{2}$ proportionis EA, ad AV. In tertia, mediæ ſunt duæ, & ratio EA, ad maiorem eſt $\frac{1}{3}$ rationis EA, ad AV. A primo ergo ad vltimum ratio circumferentiæ radij EA, ad arcum VTI, eſt compoſita

ex



ex ratione EA, ad AV, & ex tali parte rationis EA, ad AV, quæ ſit ad ipſam vt vnitas ad numerum. Sed ex talibus proportionibus componitur talis ratio, quæ ad rationem EA, ad AV, ſit vt numerus ſpiralis vnitate auctus ad numerum. V.g. in prima ſpirali, ex ratione EA, ad AV, & ex alia ratione EA, ad AV, fit duplicata ratio EA, ad AV. In ſecunda, ex ratione EA, ad AV, & ex ſubduplicata ratione EA, ad AV, fit ſeſquialtera rationis EA, ad AV. In tertia, ex ratione EA, ad

N AV,

Digitized by Google

A V, & ex eius triente, fit eius ſeſquitertia. Et ſic in alijs. Ergo circumferentia radij E A, ad arcum V T I, erit in tali ratione, quæ ad rationem E A, ad A V, ſeu Q O, ad O X, ſit vt numerus vnitate auctus ad numerum. Sed ſuppoſuimus etiam ab initio, rationem R Q, ad G X, eſſe ad rationem radicalem R Q, ad N X, ſeu Q O, ad O X, vt numerus ſpiralis vnitate auctus ad numerum. Ergo vt circumferentia radij E A, ad arcum V T I, ſic R Q, ad G X. Et permutando. Sed circumferentia ſuppoſita fuit æqualis R Q. Ergo etiam arcus V T I, erit æqualis G X. Et hoc vbilibet. Ergo exceſſus circuli ſupra ſpatium ſpirale, erit æqualis trilineo R G O Q. Quod erat oſtendendum.

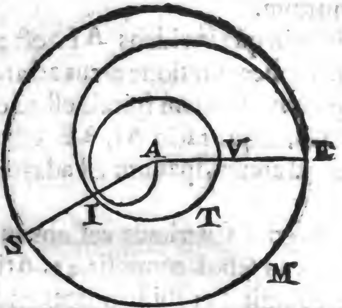
COROLLARIVM.

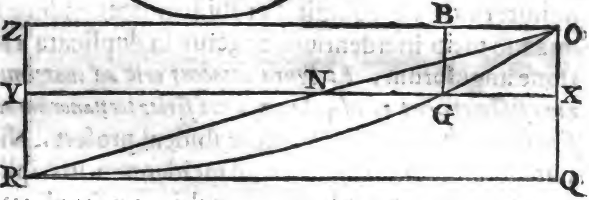
Cum ergo triangulum R N O Q, ſit æquale circulo radij A E, erit exceſſus trianguli ſupra trilineum R G O Q, æqualis ſpatio ſpirali A I E A.

SCHOLIVM.

Infinita ergo trilinea R G O Q, erunt illa de quibus loquuti ſumus in propoſit. 8. in quibus ratio N X, ad X G, eſt talis fractio rationis radicalis R Q, ad N X, vt eius numerator ſit vnitas, denominator verò 2. 3. 4. &c. in progreſſione Arithmetica. Vbi etiam concluſum fuit, rectangulum Z Q,

fore





fore ad triliſneum RGOQ, vt duplus numerus denominatoris fractionis vnitate auctus, ad ipſum numerum denominatoris. Nempe vt 5. ad 2. Vt 7. ad 3. Vt 9. ad 4. Et ſic in infinitum. Ergo triangulum RNOQ, dimidium parallelogrammi, erit ad trilineum, vt idem antecedens, ad duplum numerum denominatoris. Nempe vt 5. ad 4. Vt 7. ad 6. Vt 9. ad 8. Et per conuerſionem rationis, & conuertendo, erit exceſſus trianguli ſupra trilineum ad ipſum triangulum, & conſequenter ſpatium ſpirale ad ipſum

primum circulum, vt vnitas ad duplum numerum vnitate auctum. Nempe vt 1. ad 5. Vt 1. ad 7. Vt 1. ad 9. Et ſic in infinitum.

In illa ergo ſpirali in qua incidens AI, eſt ad incidentem AE, in duplicata ratione arcus ad arcum, ſeù anguli ad angulum, ſpatium ſpirale eſt ad circulum vt 1. ad 5. In illa, in qua ratio AI, AE, eſt triplicata rationis arcus ad arcum, ſpatium eſt ad circulum vt 1. ad 7. Etc.

Ageometricè ergo diſcurrimus vel nos in præſenti, vel Vuallisius in ſchol. propoſit. 45. Arithm. infinitorum, vbi colligit (vt ibidem licet videre) quandò ratio incidentium augetur in duplicata ratione angulorum, *Et figura adiacens erit ad conterminum ſectorem, vt* 1. *ad* 4. (*nempe vt ſeries tertianorum ad ſeriem æqualium.*) Cum alijs, quæ ibidem profert. Nimirum quandò incidens eſt ad incidentem in triplicata ratione arcus ad arcum, vel in quadruplicata &c. *eſſe figuram adiacentem ad conterminum ſectorem, vt* 1. *ad* 5. 6. Etc.

Quæ etiam dicit de menſura ipſarum linearum ſpiralium non benè percipimus. Sed hæc prætereamus; nobis enim ſufficit ſuppleuiſſe defectui præfatæ digreſſionis; illaque ſpatia ſpiralia menſuraſſe, quæ nequiuimus illo tempore, carentes doctrinis ſuperiùs expoſitis: nimirum trilineis parabolicis proportionatis. Quòd verò diuerſa collegerimus ab Vuallisio, prouenit ex eo, quòd nos perambulauimus veterem Caualerij viam. Vuallisius verò nouam

Digitized by Google

quam ſtruit. Quæ autem tutior ſit, ac ad veritatem ducens, examinet Lector. Nobis enim videtur de præfatis certiſſimam ſcientiam poſſidere. Quamuis aliundè ſumma Vuallisij authoritas, profundumque ingenium in Geometricis, valdè nos concutiat.

Quid quid ſit, certum eſt, tàm noſtras infinitas ſpirales, in quibus anguli ad angulos ſunt in multiplicatis rationibus incidentium; quàm Vuallisianæ, in quibus anguli ad angulos ſunt in ſubmultiplicatis rationibus incidentium, poſſe ad infinitè infinitas dilatari; ſecundum quod ipſa trilinea parabolica fuerunt ſic ampliata. Quodlibet enim trilineum inſeruiet vni ſpatio ſpirali, quod ex illo menſurabitur. Sed omittamus hæc Lectorum induſtriæ, & ad alia properemus.

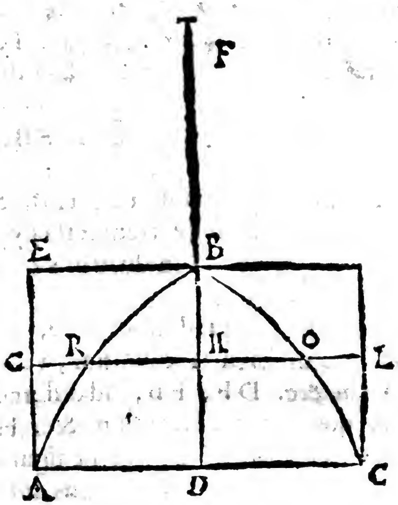
Digitized by Google

DE INFINITIS CONOIDIBVS HYPERBOLICIS.

QVam fœcunda, veritatumque ferax extet infinitarum parabolarum doctrina, vnicuique manifeſtum erit recogitanti in noſtris operibus firmata. Aſt nec hucuſque exinanita putanda eſt. Pariet enim adhuc menſuram, & centra grauitatis infinitorum ſolidorum, quæ infinita Conoidea Hyperbolica iure meritò nuncupari poſſumus. His famulantur infinita trilinea principalia. Et ex illis hauriemus antedicta ſymptomata de talibus conoidibus, quæ dici poterunt principalia. Quumque infinita trilinea fuerint extenſa ad infinitè infinita. Lector poterit ſuo Marte etiam hæc conoidea ampliare. Geneſim verò cum cœteris talium infinitorum ſolidorum, recenter nobis ſubminiſtrata fuit à Methodo, qua in propoſit. 16. & 17. Miſcellanei noſtri Geometrici parte 1. vſi ſumus in cubatione Conoidis Hyperbolici ordinarij, Geometris ſat familiaris.

Hæc autem talis eſt. Cogitemus figuram ABC, deficientem ad partes B, cuius baſis ADC, dia-

Digitized by Google



meter D B, quæ taliter ſit continuata ad F, vt vbicunque applicatis ordinatim A D, R H, ſit vt quadratum A D, ad quadratum R H, ſic differentia quarumlibet poteſtatum D F, F B, ad differentiam poteſtatum H F, F B. Et ſic vbilibet.

Si ſit vt quadratum A D, ad quadratum R H, ſic D B, differentia inter D B, F B, ad B H, differentiam inter H F, F B. Eſt luce clarius, figuram A B C, fore parabolam quadraticam.

Item, ſi ſit vt quadratum A D, ad quadratum

PH,

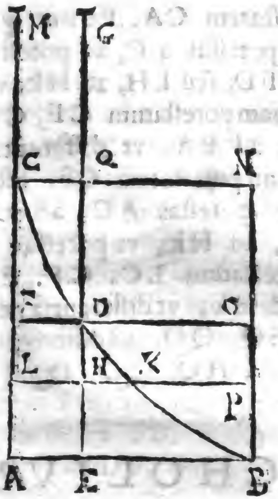
RH, ſic differentia quadratorum DF, FB, ad differentiam quadratorum HF, FB. Figuram eſſe hyperbolam ordinariam, cuius centrum F, ex centro FB, paucis fiet manifeſtum. Nam differentia quadratorum DF, FB, eſt rectangulum ſub DB, & ſub compoſita ex DB, & ex dupla FB. Pariter differentia quadratorum HF, FB, eſt rectangulum ſub HB, & ſub compoſita ex HB, & ex dupla BF, quæ erit diameter tranſuerſa hyperbolæ. Hæc omnia etiam parum in doctrinis conicorum exercitatis ſunt obuia.

Quandò verò ſit vt quadratum AD, ad quadratum RH, ſic differentia cuborum, vel quadrato quadratorum, &c. DF, FB, ad differentiam cuborum, vel quadratoquadratorum, &c. HF, FB; neſcimus tunc cuius indolis extent figuræ ABC. Vocabimus autem ipſas cum duabus antecedentibus, nempe cum vera Hyperbola, & cum Parabola, infinitas hyperbolas. Quæ ſi intelligantur rotari circa BD, facile ſolidorum genitorum aſſignabimus menſuras, & centra grauitatis. Sed pro his ſit

PROPOSITIO XIX.

Si trilineum Parabolicum quodcumque seriei principalis ſecetur DE, diametro parallela, & in ipſo ordinatim applicetur LHK, Erit EB, ad HK, vt differentia poteſtatum EQ, QD, eiuſdem gradus, cum trilineo,

neo, ad ſimilem differentiam homogenearum poteſtatum HQ, QD.



Nimirum, ſi trilineum ſit triangulum, vt ED, ad DH. Si trilineum ſit quadraticum, vt differentia quadratorum EQ, QD, ad differentiam quadratorum HQ, QD. Si cubicum, vt differentiæ cuborum. Et ſic in infinitum. Hæc propoſitio probabitur eo modo, quo probata fuit propoſit. 16. citat. Miſcell. Ordinatim applicetur etiam

FDQ. Quoniam, ex natura trilinei, eſt vt AB, ad FD, ſic congruens poteſtas AC, ad ſimilem poteſtatem CF; ergo per conuerſionem rationis, & conuertendo, erit EB, ad BA, vt differentia poteſtatum AC, CF, congruentium trilineo, ad ſimilem poteſtatem CA. Pariter, quoniam vt FD, ad Lk, ſic poteſtas FC, ad poteſtatem CL, erit diuidendo, FD, ſeù LH, ad Hk, vt poteſtas CF, ad differentiam poteſtatum CF, CL. Probata eſt ſupra BE, ad BA, vt differentia poteſtatum AC, CF, ad poteſtatem CF. Eſt BA, ad FD, ſeu LH, vt poteſtas AC, ad poteſtatem CF. Et eſt LH, ad Hk, vt poteſtas CF, ad differentiam poteſtatum LC, CF. Ergo ex æquali, erit EB, ad Hk, vt differentia poteſtatum AC, CF, ſeu EQ, QD, ad differentiam poteſtatum LC, CF, vel HQ, QD. Quòd erat oſtendendum.

SCHOLIVM I.

Ex dictis, facilè patebit, ſi figura ABC, ſupra explicata ſit talis quantitatis, vt eius axis DB, æquetur ED, in trilineo, & addita BF, ſit æqualis DQ. Facilè inquam patebit, fore cylindrum EC, ad ſolidum ABC (reuolutis prius rectangulo ED, & ſemifigura ABD, circa DB) vt rectangulum OE, ad trilineum DEB.

Porrò ratio rectanguli OE, ad trilineum ODE,

aſſignata fuit in corollario propoſit. 15. lib. 1. de Infinit. Parab. Ibi enim traditum fuit, eſſe vt tot continuè proportionales in ratione E Q, Q D, quarum maxima ſit E Q, quotus eſt numerus parabolæ, & hæ tot vicibus acceptæ quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, ad eaſdem proportionales, ſed ſic acceptas, vt prima ſit vnica, ſecunda dupla, tertia tripla, & ſic in infinitum.

Ex quibus hauriemus ad noſtrum propoſitum. *Quod ſi ratio D F, ad F B, continuetur ad tot terminos vt numerus eorum ęquetur numero hyperbolæ, erit cylindrus E C, ad conoides A B C, vt tot tales proportionales replicatæ ſecundum numerum hyperbolæ, ad eaſdem, ſed replicatas ſecundum progreſſionem Arithmeticam numerorum 1. 2. 3. 4. &c.* Nimirum ſi conoïdes ſit primum, nempe parabolicum, vt dupla D F, ad vnicam D F. Si conoides ſit ſecundum, nempe hyperbolicum ordinarium, vt tripla D F, vna cum tripla F B, ad vnicam F D, cum dupla F B. Si conoides ſit ſecundum, vt quadrupla D F, cum quadrupla F B, & cum quadrupla harum tertia proportionali, ad D F, duplam F B, & triplam tertiam proportionalem. Et ſic in cęteris.

SCHOLIVM II.

Sed inſuper patebit, conoides A B C, & trilineum D E B, fore magnitudines proportionaliter analogas, &c. Eodem ergo modo ſecabitur B D, à cen-

centro grauitatis ſolidi, ac DE, à centro æquilibrij trilinei appenſi ſecundum DE.

Sed quomodò poſſit reperiri centrum æquilibrij præfati trilinei, facilè habebimus ex propoſit. 14. lib. 3. De Infin. Parab. Cum enim inibi aſſignatum ſit centrum æquilibrij portionis BDO, appenſæ ſecundum BO, vel ED; ex hoc, ex centro æquilibrij rectanguli EO, & ex ratione portionis ad trilineum, habebimus centrum æquilibrij quæſitum. Et conſequenter centrum grauitatis dicti ſolidi.

SCHOLIVM III.

Et hæc ſunt (Benigne Lector) quæ pro hac nona vice ſufficere debent. Alia etiam addere erat animus. Sed munus nouiter nobis impoſitum, Geometriam explicandi in Patauino Lyceo, coegit ad alia reſpicere. Aſt prout eſt in adagio. *Quod differtur, non aufertur*. Si ex noſtris elucubrationibus aliquam capis vtilitatem, aut voluptatem: opta nobis & vitam, & ſanitatem. Quas ſi Deus largiri dignabitur; cum Geometriæ incumbere competat nunc ex officio, poteris non pauca expectare. Vale.

FINIS.

Digitized by Google